Weitere Beispiele zur Zerlegung quartischer Polynome

1. Beispiel: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
Hier ist $4ab - a^3 = 32 = 8c$, so dass der Sonderfall vorliegt. Mittels der Formeln für p, q, r, s findet man sofort

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 1) = (x + 1)^2(x + 1)^2 = (x + 1)^4.$$

2. Beispiel: $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12 + 36$.
Hier ist $4ab - a^3 = -96 = 8c$, so dass der Sonderfall vorliegt. Man findet auch hier wieder sofort

$$x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12 + 36 = (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 6) = (x - 2)(x + 3)(x - 2)(x + 3) = ((x - 2)(x + 3))^2 .$$

3. Beispiel: $x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 30x + 50$.
Hier ist $4ab - a^3 = -240 = 8c$, so dass der Sonderfall vorliegt. Man findet

$$x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 30x + 50 = (x^2 + 2x - 5)(x^2 + 2x - 10) = (x + 1 + \sqrt{6})(x + 1 - \sqrt{6})(x + 1 + \sqrt{11})(x + 1 - \sqrt{11}).$$

4. Beispiel: $x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 15$.
Hier ist $4ab - a^3 = 128 = 8c$, so dass der Sonderfall vorliegt. Man findet

$$x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 15 = (x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2x + 3),$$

und hier sind die beiden quadratischen Polynome irreduzibel im Körper der reellen Zahlen.

5. Beispiel: $x^4 + 3x^3 - 14x^2 + 6x + 4$.
Hier ist $4ab - a^3 = -69$ und $8c = 48$, so dass jetzt der Sonderfall nicht vorliegt.
Kubische Resolvente: $u^3 + 28u^2 + 198u + 324 = 0 \;\Leftrightarrow\; (u + 18)(u^2 + 10u + 18) = 0$.
Für $u = -18$ ist $w = 9$, und die Formeln für p, q, r, s im Allgemeinfall ergeben

$$x^4 + 3x^3 - 14x^2 + 6x + 4 = (x^2 + 6x + 2)(x^2 - 3x + 2) = (x + 3 - \sqrt{7})(x + 3 + \sqrt{7})(x - 2)(x - 1).$$

6. Beispiel: $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 4$.
Hier ist $4ab - a^3 = 16$ und $8c = 32$, so dass der Sonderfall nicht vorliegt.
Kubische Resolvente: $u^3 - 6u^2 + u + 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; (u + 1)(u^2 - 7x + 8) = 0$.
Für $u = -1$ ist $w = 2\sqrt{2}$, und die Formeln für p, q, r, s im Allgemeinfall ergeben

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = \left(x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 2\right)\left(x^2 + (1 - \sqrt{2})x + 2\right),$$

und hier sind die beiden quadratischen Polynome irreduzibel im Körper der reellen Zahlen.

7. Beispiel: $x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x + 1$.
Hier ist $4ab - a^3 = -256$ und $8c = 32$, so dass der Sonderfall nicht vorliegt.
Kubische Resolvente: $u^3 + 24u^2 + 156u + 224 = 0 \;\Leftrightarrow\; (u + 2)(u + 8)(u + 14) = 0$.

a) Wählt man $u = -2$, so ist $w = 2\sqrt{6}$, und die Formeln für p, q, r, s im Allgemeinfall ergeben

$$x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x + 1 = \left(x^2 + (2 + \sqrt{6})x - (5 + 2\sqrt{6})\right)\left(x^2 + (2 - \sqrt{6})x - (5 - 2\sqrt{6})\right).$$

b) Wählt man $u = -8$, so ist $w = 4\sqrt{3}$, und die Formeln für p, q, r, s im Allgemeinfall ergeben

$$x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x + 1 = \left(x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x - (2 - \sqrt{3})\right)\left(x^2 + 2(1 - \sqrt{3})x - (2 - \sqrt{3})\right).$$

c) Wählt man $u = -14$, so ist $w = 6\sqrt{2}$, und die Formeln für p, q, r, s im Allgemeinfall ergeben

$$x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x + 1 = \left(x^2 + (2 + 3\sqrt{2})x + 1\right) \left(x^2 + (2 - 3\sqrt{2})x + 1\right).$$

Zerlegt man in den drei vorgenannten Fällen die quadratischen Polynome jeweils weiter, so erhält man für die Funktion $x \mapsto x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x + 1 = 0$ die vier Nullstellen

$$x_1 = -\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) - \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right), \quad x_2 = -\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right),$$
$$x_3 = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) - \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3}\right), \quad x_4 = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3}\right),$$

und je nachdem, wie man je zwei der vier Linearfaktoren $x - x_i,\ 1 \leq i \leq 4$, zusammenfasst, erhält man je eines der sechs in a) bis c) vorkommenden quadratischen Polynome zurück.

8. Beispiel: $x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x + 1$.
Hier ist $4ab - a^3 = -120$ und $8c = 16$, so dass der Sonderfall nicht vorliegt.
Kubische Resolvente: $u^3 + 28u^2 + 196u + 64 = 0 \ \Leftrightarrow\ (u + 16)(u^2 + 12u + 4) = 0$.
Für $u = -16$ ist $w = 2\sqrt{17}$, und die Formeln für p, q, r, s im Allgemeinfall ergeben

$$x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x + 1 = \left(x^2 + (1 + \sqrt{17})x + 1\right) \left(x^2 + (1 - \sqrt{17})x + 1\right)$$

und durch weitere Zerlegung in Linearfaktoren erhält man die Nullstellen des gegebenen Polynoms:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{17} - \sqrt{14 + 2\sqrt{17}}\right), \quad x_2 = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{17} + \sqrt{14 + 2\sqrt{17}}\right)$$
$$x_3 = -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{17} - \sqrt{14 - 2\sqrt{17}}\right), \quad x_4 = -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{17} + \sqrt{14 - 2\sqrt{17}}\right).$$