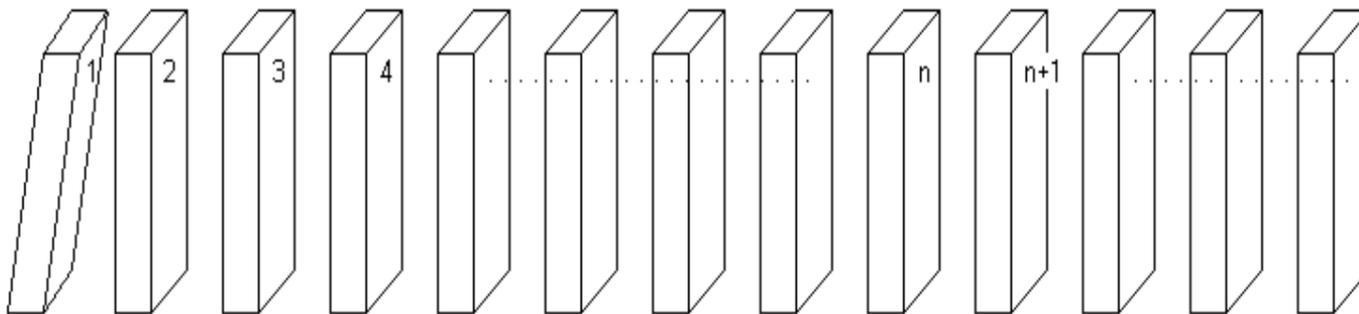


Die vollständige Induktion

➔ Stoße den ersten Stein um und Sorge dafür, dass der n-te Stein auch den (n+1)-ten Stein umwirft ($n \in \mathbb{N}$).



Ein Crashkurs

Die vollständige Induktion, ein Thema der höheren Mathematik, ist unverzichtbarer Inhalt beim Mathematik-, Physik- und Ingenieurstudium.

Sie eignet sich nicht zum Schulstoff, da das Verständnis für die verwendete Logik und ihre axiomatische Grundlegung fehlt. Demotivierend für die Studierenden ist außerdem, dass damit Formeln bewiesen, aber nicht hergeleitet werden. Die Formeln fallen einfach vom Himmel. Trotzdem findet die vollständige Induktion von Fall zu Fall Eingang in den Lehrplan der Gymnasien oder - und das ist für mich der Anlass dieses Kurses - der Aufnahmeprüfungen für das Hochschulstudium für Ausländer. Sie wird als Kapitel für sich behandelt und hat im Schulstoff keine weiteren Anwendungen.

Der folgende Kurs soll - ganz im Gegensatz zu den sonstigen Intentionen dieser Seiten - nicht überzeugen, sondern nur die nötigen Techniken vermitteln, um eine Prüfung einigermaßen unbeschadet zu überstehen.

Er kann vielleicht sogar bewirken, dass der Leser ein Vergnügen an diesem Thema und anderen Beweistechniken, die eine solide logische Schulung erfordert, empfindet.

Wer sich in die vollständige Induktion vertiefen möchte, findet einen ersten Einstieg im [Wikipedia-Lexikon](#).

Im folgenden ist $\mathbf{N} = \{1;2;3;4; \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbf{N}_0 = \{0;1;2;3;4; \dots\}$.

In manchen Büchern wird die Null zu \mathbf{N} hinzugenommen. Im Wesentlichen ändert sich nichts dadurch.

Mit Hilfe der vollständigen Induktion werden **Aussageformen** $A(n)$ bewiesen ($n \in \mathbf{N}$).
(Näheres zu Aussageformen siehe unten.)

Wir werden weiter unten die folgende **Formel** mit Hilfe der vollständigen Induktion beweisen:

$$A(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad (\text{Eine Summe als "geschlossener Ausdruck"})$$

Gewöhnlich spricht man hier von einer **Formel** und meint damit die **Allgemeingültigkeit einer Aussageform**. Dies wird noch erläutert.

Wie man auf diese Formel kommt, wird hier nicht besprochen. Es geht nur darum, ihre Gültigkeit nachzuweisen. (Würde ich nämlich die Formel auf direktem Wege herleiten, wäre es ja nicht mehr nötig, sie zu beweisen. Also tun wir so, irgend jemand hätte die Formel als Behauptung aufgestellt. Jetzt geht es nur noch darum, sie zu beweisen.)

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ wird die Aussageform zu einer **Aussage**:

$$A(1): 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \quad (\text{wahr: Probe stimmt})$$

$$A(2): 1 + 2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2} \quad (\text{wahr: Probe stimmt})$$

$$A(3): 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot (3+1)}{2} \quad (\text{wahr: Probe stimmt})$$

...

$$A(1000000): 1 + 2 + \dots + 1000000 = \frac{1000000 \cdot 1000001}{2} \quad (\text{Bitte nachrechnen :-})$$

...

An diesem Beispiel erkennt man: **Aussageformen** enthalten eine oder mehrere Variablen (hier die Variable $n \in \mathbf{N}$). Sie werden zu Aussagen, wenn die Variablen bestimmte Werte annehmen. Jede **Aussage** ist entweder **wahr** oder **falsch**.

Hier sind Aussageformen der Form $A(n)$ wichtig, die für alle $n \in \mathbf{N}$ wahr sind. Diese Aussageformen nennt man **allgemeingültig** in \mathbf{N} .

1. Aufgabe: Sind die folgenden Aussageformen in \mathbf{N} allgemeingültig?

- a) Wenn n ein Vielfaches von 6 ist, dann ist n eine gerade Zahl.
- b) Wenn $n = 0$ ist, dann ist $n + 1 = 1$.
- c) Wenn $n = n + 1$ ist, dann ist $n + 1 = n + 2$.

Lösungen

Die vollständige Induktion ist eine Beweistechnik, um die Formeln der Form $A(n)$ zu beweisen.

"Formeln der Form $A(n)$ " bedeutet - allgemeiner formuliert -: "Die Allgemeingültigkeit der Aussageform $A(n)$ für $n \in \mathbf{N}$ oder "Die Gültigkeit der Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbf{N}$."

Beweisschema der vollständigen Induktion

Die Formel $A(n)$ soll bewiesen werden.

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

I Induktionsanfang: Prüfe, ob $A(1)$ gilt.

II Induktionsschritt: Zeige: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ($n \in \mathbf{N}$)
("Aus $A(n)$ kann $A(n+1)$ hergeleitet werden")

Mit dem Nachweis von I und II ist die Formel $A(n)$ bewiesen.

Zur Begründung verweise ich auf die Dominosteine in der Figur am Anfang des Kapitels.

Beispiel: Behauptung:

$$A(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis: I Induktionsanfang:

$$A(1): 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \quad (\text{wahr: Probe stimmt})$$

II Induktionsschritt: Wir nehmen an:

$$A(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ gälte}$$

Jetzt müssen wir zeigen, dass daraus die Formel

$$A(n+1): 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

hergeleitet werden kann.

Herleitung:

$$\text{Aus } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ folgt}$$

durch Addition von $n+1$ auf beiden Seiten:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1)$$

Jetzt werden die Rechnungen meist sehr technisch. Du mußt darauf hinsteuern, dass als letzter Ausdruck der Gleichungskette die rechte Seite von $A(n+1)$ steht.

Wenn Du aber in der Prüfung das Schema soweit aufgeschrieben hast, hast Du die meisten Punkte schon erworben.

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} \quad | (n+1) \text{ ausklammern!}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \quad \text{q.e.d.}$$

"q.e.d." (lat. "quod erat demonstrandum" = "Was zu beweisen war") wird häufig hingeschrieben, wenn der Beweis fertig ist.

2. Aufgabe: Beweise;

$$\text{a) } 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$\text{b) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}$$

Lösung

3. Aufgabe: Schreibe jeweils $A(1)$ und $A(n+1)$ auf: (Das ist schon der halbe Beweis.)

a) Eine arithmetische Reihe

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

b) Noch eine arithmetische Reihe:

$$5 + 8 + 11 + 14 + \dots + (5+3 \cdot n) = 5(n+1) + 3 \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

c) Die allgemeine arithmetische Reihe:

$$a + (a+k) + (a+2k) + (a+3k) + \dots + (a+nk) = a(n+1) + k \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

d) Die allgemeine geometrische Reihe;

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^n = a \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

e) $n = n + 1$ (Zusatzfrage: Warum nicht allgemeingültig!)

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & & 2 & 1 \\ & & & & & \end{matrix}$$

$$f) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

Nebenbei bemerkt: [Weitere Summenformeln](#)

$$g) 3^n - 3 \text{ ist durch } 6 \text{ teilbar}$$

h) Die Bernoullische Ungleichung

Ein Beispiel, bei dem der Induktionsanfang $n=2$ ist.

$$(1+p)^n > 1 + n \cdot p \text{ für } p > -1 \text{ und } n > 1$$

i) Für $f(x) = (x+2) \cdot e^x$ ist die n -te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = (x + n + 2) \cdot e^x$$

j) Für $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x}$ ist die n -te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (x + 2 - n) \cdot e^{-x}$$

[Lösungen](#)

4. Aufgabe: Beweise, dass die Aussageformen von Aufgabe 2 bis auf e) allgemeingültig sind (Vor allem sind wichtig: a) d) i) und j).

[Lösungen](#)

5. Aufgabe: (Diesmal beginnt die Folge mit $n=0$)

Die Folge (a_n) wird rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ a_{n+1} &= r \cdot a_n + s \quad \text{für } n \geq 0 \quad (r \neq 1) \end{aligned}$$

Behauptung: Für die Folge gibt es einen geschlossenen Ausdruck der Form

$$a_n = c \cdot r^n + d \quad (n \geq 0) \text{ für passende Zahlen } c \text{ und } d.$$

Bemerkung: Die wichtigste Anwendung hiervon ist die **Tilgung eines Darlehens**, siehe ...

[Lösung](#)

6. Aufgabe: Nur für Geübte und Kenner von rechnungen mit Binomialkoeffizienten.

Die Binomialkoeffizienten werden definiert zu:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \quad (k \in \mathbf{N}_0, n \in \mathbf{R}) \text{ [Zähler und Nenner haben } k \text{ Faktoren]}$$

Man beachte bei dieser Definition, dass n keine natürliche Zahl sein muss, zum Beispiel ist

$$\binom{-1/2}{4} = \frac{(-1/2) \cdot (-3/2) \cdot (-5/2) \cdot (-7/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 16} = \frac{35}{128}$$

Bemerkung: $\binom{n}{0} = 1$, das neutrale Element der Multiplikation.

$$\text{Behauptung: } \binom{2k}{k} = (-4)^k \cdot \binom{-1/2}{k} \quad (k \in \mathbf{N}_0)$$

[Lösung](#)

Hinweis: Damit läßt sich die folgende Formel beweisen:

$$4^n = \binom{0}{0} \cdot \binom{2n}{n} + \binom{2}{1} \cdot \binom{2n-2}{n-1} + \binom{4}{2} \cdot \binom{2n-4}{n-2} + \dots + \binom{2n-2}{n-1} \cdot \binom{2}{1} + \binom{2n}{n} \cdot \binom{0}{0}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k}$$

Eine Formel über die mittleren Elemente des Pascalschen Dreiecks siehe "Concrete Mathematics" (5.39) von Graham, Knuth und Patashnik.

Beweis: Wir verwenden die "Vandermondesche Identität":

$$\sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \cdot \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$$

$\binom{m+n}{k}$ ist nämlich die Anzahl aller Teilmengen mit k Elementen aus einer Menge

mit $m+n$ Elementen. Spaltet man dann die Menge in zwei Mengen mit m und n Elementen auf

so erhält man die Anzahl aller Teilmengen mit k Elementen, indem man aus der ersten Menge

j Elemente wählt und aus der zweiten $k-j$ und alle Anzahlen von $j=0$ bis k addiert.

Die Formel gilt auch für reelle Zahlen m und n .

Damit folgt:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \sum_{k=0}^n (-4)^k \binom{-1/2}{k} \binom{-1/2}{n-k}$$

$$= (-4)^k \binom{-1}{n} = (-4)^k \cdot \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-n)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = 4^n$$

q.e.d. (Jutta Gut)