Einführung in das Skalarprodukt

Lösungen

Mit TTMathe "Geometrie|Vektor/Zwei Vektoren/Dreieck" kontrolliert:

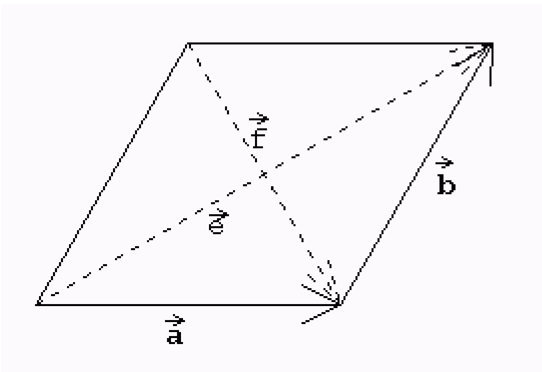
1 a) 5; 6,5; 5; $\sqrt{5}$; $2\sqrt{10}$ b) 3; 7; 11; 13; $\sqrt{14}$

2 a) $\cos\alpha = \frac{4\cdot 12 - 3\cdot 5}{5\cdot 13} \Rightarrow \alpha = 59{,}5°$ b) $\cos\alpha = \frac{6 - 8 + 5}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{38}} \Rightarrow \alpha = 83{,}9°$

3.
$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $a = \sqrt{82}$ $b = 4$ $c = \sqrt{34}$

$\alpha = 133{,}3°$ $\beta = 18{,}7°$ $\gamma = 27{,}9°$

4. Raute



Im Parallelogramm sei $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{f} = \vec{a} - \vec{b}$.

Wir verwenden die Gleichheit $a^2 = \vec{a}^2$ bzw. $b^2 = \vec{b}^2$

und die Äquivalenz $a = b \Leftrightarrow \vec{a}^2 = \vec{b}^2$.

4. a) Voraussetzung: $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ Behauptung: $\vec{e}\cdot\vec{f} = 0$

b) Voraussetzung: $\vec{e}\cdot\vec{f} = 0$ Behauptung: $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$

Beweis: $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$

$\Leftrightarrow \vec{e}\cdot\vec{f} = (\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$

5. Ist $n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P(p_1|p_2|p_2) = P(3|-7|11) \in E$, dann kann man die Ebenengleichung sofort folgendermaßen angeben:

I E: $(\vec{x} - \vec{p})\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow$ E: $\begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ E: $\begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 + 7 \\ x_3 - 11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ E: $2(x_1 - 3) + (-5)(x_2 + 7) + 0(x_3 - 11) = 0 \Rightarrow$ E: $2x_1 - 5x_2 = 41$

II E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, wobei a,b,c durch $\vec{n}$ und d durch P bestimmt ist.

Also: E: $2x_1 - 5x_2 = d$. Punktprobe mit P(3|-7|11) ergibt $2\cdot 3 - 5\cdot(-7) = d$

Somit E: $2x_1 - 5x_2 = 41$.

6. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

7. E: $-x_2 + 2x_3 = -8$

8. a) gesucht Abstand des Punktes P(-1|2|1) von der Ebene E: $2*x_1 - x_2 - 5x_3 = 3$.

I. Lösungsweg (ohne Formel): Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ durch P senkrecht zu E

schneidet E im Punkt F(-1/5|1'3/5|-1).

dann ist $d(P,E) = |\overrightarrow{FP}| = \frac{2}{5}\sqrt{30} = 2{,}191$ LE.

II. Lösungsweg: Die Hesse-Form von E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 - d = 0$ ist

$$\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0. \text{ Hier } \frac{2x_1 - x_1 - 5x_3 - 3}{\sqrt{30}} = 0.$$

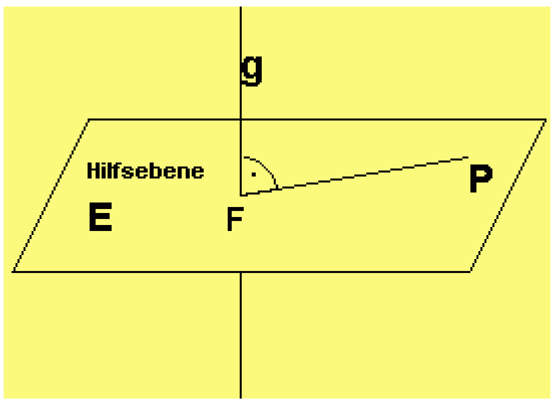
$P(p_1|p_2|p_3) = P(-1|2|1)$ hat dann von E den Abstand $d = d(P,E)$

$$d = \left|\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| \quad \text{Hier } d = \left|\frac{2\cdot(-1) - 2 - 5 - 3}{\sqrt{30}}\right| = \frac{12}{\sqrt{30}} = \frac{2}{5}\sqrt{30} \text{ LE}$$

(Kontrollrechnung mit TTMathe "Geometrie|Abstand Punkt Ebene")

b) Gegeben g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und P(4|6|2).

Gesucht Abstand $d = d(P,g)$. Wir berechnen zunächst mit der Hilfsebe E: $x_1 + x_2 = 10$ durch P senkrecht zu g den Schnittpunkt F von E mit g. Das führt zur Gleichung $(4+t) + (2 + t) = 10$ mit der Lösung



t = 2 und F(6|4|1) => $d = |\overrightarrow{FP}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 3$ LE

(Rechnung: TTMathe "Geometrie|Abstand Punkt Gerade")

c) Gesucht: Der Abstand der windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Schritt: Suche Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ausrechnen mit Hilfe des Vektorproduktes

ergibt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ohne Vektorprodukt wird die Lösung des LGS bestimmt:

$$\left(\begin{array}{l} 3a + 2b + 2c = 0 \\ 3a + 3b + 4c = 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{r} 3a + 2b + 2c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{array}\right)$$

c beliebig, $b = -2c$, $a = \frac{2}{3}c$. Eine Lösung genügt. Zum Beispiel $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Bilde den Einheitsvektor: $\vec{n}_o = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Schritt: Formel $d(g,h) = |(\vec{q} - \vec{p})\cdot\vec{n}_0| = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}(-2 + 36 + 15) = 7$ LE

Rechnung macht auch TTMathe"Geometrie|Zwei Geraden"

zurück