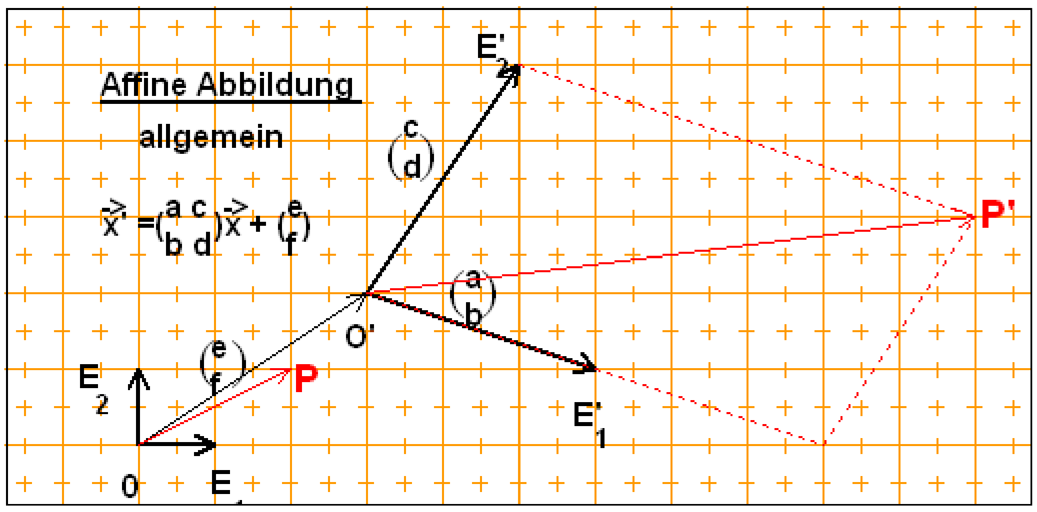
Affine Abbildungen



und - kurzgefasst - **Affiner Raum**

Der affine Raum

Diese knappe Einführung zu dem Begriff des affinen Raumes soll die Schreibweise bei den Beispielen von Kongruenzen, Ähnlichkeitsabbildungen, **Affinitäten** und **Koordinatentransformationen** erläutern.

Dem nicht so vertrauten Leser empfehle ich, sich zuerst mit **Affinitäten** (das sind Verschiebungen, Spiegelungen, Scherungen etc.) oder gleich mit konkreten **Beispielen** zu beschäftigen und erst bei Bedarf diese abstrakte Einleitung durchzuarbeiten.

Definition: Ein **affiner Raum** wird durch ein Tripel (PR,VR,Pfeil) beschrieben:

PR heißt Punktraum, seine Elemente **Punkte**,
VR ist ein Vektorraum, seine Elemente werden als **Vektoren** bezeichnet, und
Pfeil (A,B) -> Pfeil(A,B) ist eine Abbildung von PR×PR in VR (PR×PR: das kartesische Produkt von PR und PR). Das heißt: Jedem Punktpaar A,B ist ein eindeutig bestimmter Vektor zugeordnet.

Künftig verwenden wir die Schreibweise:
$\overrightarrow{AB}$ = Pfeil(A,B)
Neben den Vektorraumaxiomen gelten noch folgende zwei Axiome, die Punktraum und Vektorraum verbinden.

I Zu jedem Punkt A und jedem Vektor v gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt B mit $v = \overrightarrow{AB}$.

Bezeichnung: B = A + v.

Eindeutig heißt: Wenn $v = \overrightarrow{AB_1}$ und $v = \overrightarrow{AB_2}$, so folgt daraus: $B_1 = B_2$.

Es gilt deshalb stets: $v = \overrightarrow{AB} \iff B = A + \vec{v}$.
Dieses "+" ist nicht die Addition von Vektoren, sondern ist eine Verknüpfung von einem Punkt und einem Vektor und eben durch Axiom I definiert: "Das Ansetzen von Vektor v an Punkt A ergibt B".

II Für alle Punkte A,B,C gilt: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Folgerungen:

a) Beh.: Für alle Punkte A gilt: $\overrightarrow{AA} = \vec{o}$ (Nullvektor)

Beweis: $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ (nach II). Ziehen wir auf beiden Seiten den Vektor $\overrightarrow{AA}$ ab, so erhalten wir $\overrightarrow{AA} = 0$ q.e.d.

b) Beh.: Für alle Punkte A und B gilt: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Bew.: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{o} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ q.e.d.

c) Beh.: Für alle Punkte A und alle Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ gilt: $A + (\vec{v} + \vec{w}) = (A + \vec{v}) + \vec{w}$

Beweis: Sei $A + \vec{v} = B$ und $B + \vec{w} = C$. Dann folgt: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$ und daraus $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Somit $(A + \vec{v}) + \vec{w} = B + \vec{w} = C$ und $A + (\vec{v} + \vec{w}) = C$. q.e.d.

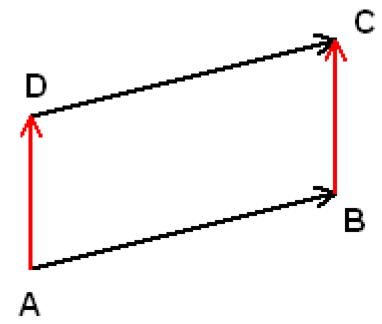
d) Beh.: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

(**Paralleogrammregel**)

Bew.: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$

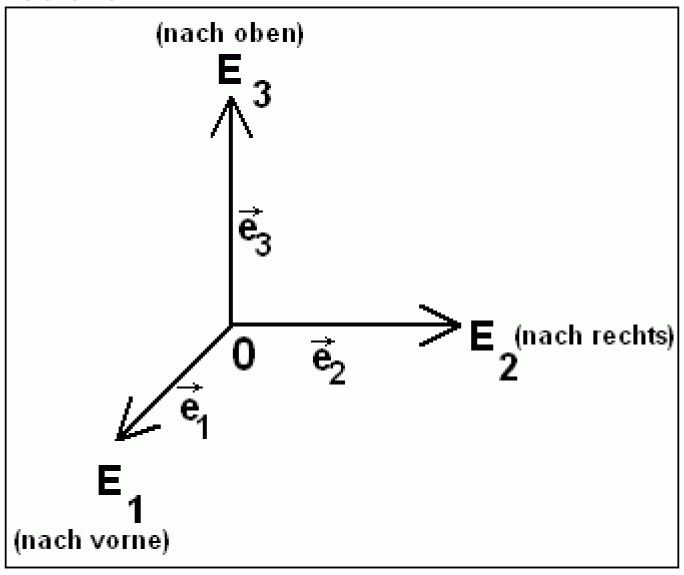
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

Die andere Richtung "<=" wird genauso bewiesen. q.e.d.



Koordinaten eines Punktes

Jedem Punkt P eines affinen Raumes kann man Koordinaten bezüglich eines Koordinatensystems zuordnen.



Zunächst wählt man einen beliebigen Punkt O als Ursprung.
Ist der zugeordnete Vektorraum zum Beispiel dreidimensional, dann wählt man noch eine Basis des zugeordneten Vektorraumes, etwa
$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
Hinweis die Punkte O, E_1, E_2 und E_3 mit
$E_1 = O + \vec{e}_1$, $E_2 = O + \vec{e}_2$ und $E_3 = O + \vec{e}_3$
nennt man "Punkte **in allgemeiner Lage**".

Jeder Punkt P hat dann eindeutig die Darstellung $P = O + x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3$ (siehe Zeichnung unten)

und wird - wenn das Koordinatensystem $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ klar ist - mit $P(x_1|x_2|x_3)$ bezeichnet.

Durch diese Zuordnung erhält man eine Affinität f (siehe unten) des affinen Raumes in R^3.

Der Bildpunkt von P ist dann $f(P) = \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix}$ (Der "Ortsvektor" $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ von P).

Hat man ein zweites Koordinatensystem $K2 = (O', \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$ mit der zugeordneten Affinität

$P \to g(P) = \begin{vmatrix} x1' \\ x2' \\ x3' \end{vmatrix}$, wobei dann P bezüglich des zweiten Koordinatensystem folgende

Koordinaten hat: $P_{bez.\ K2}(x'_1, x'_2, x'_3)$,

so kann man die Koordinaten $\begin{vmatrix} x1' \\ x2' \\ x3' \end{vmatrix} = g(f^{-1}(\begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix})$ über eine Koordinatentransformation

$\begin{vmatrix} x1' \\ x2' \\ x3' \end{vmatrix} = g(f^{-1}(\begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix})) = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} j \\ k \\ l \end{vmatrix}$ aus den Koordinaten $\begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix}$ berechnen.

Beispiel.

Beispiel R^3

Siehe: **Lektionen der Vektorrechnung**.

Die Punkte des $\mathbf{R}^3$ sind zum Beispiel A(4|5|4) und B(6|8|9).

Dann ist der ("Verbindungs-")Vektor

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Setzt man umgekehrt

den Vektor v an A an, so erhält man den Punkt B:

$A + \vec{v} = A(4|5|4) + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = B(6|8|9)$.

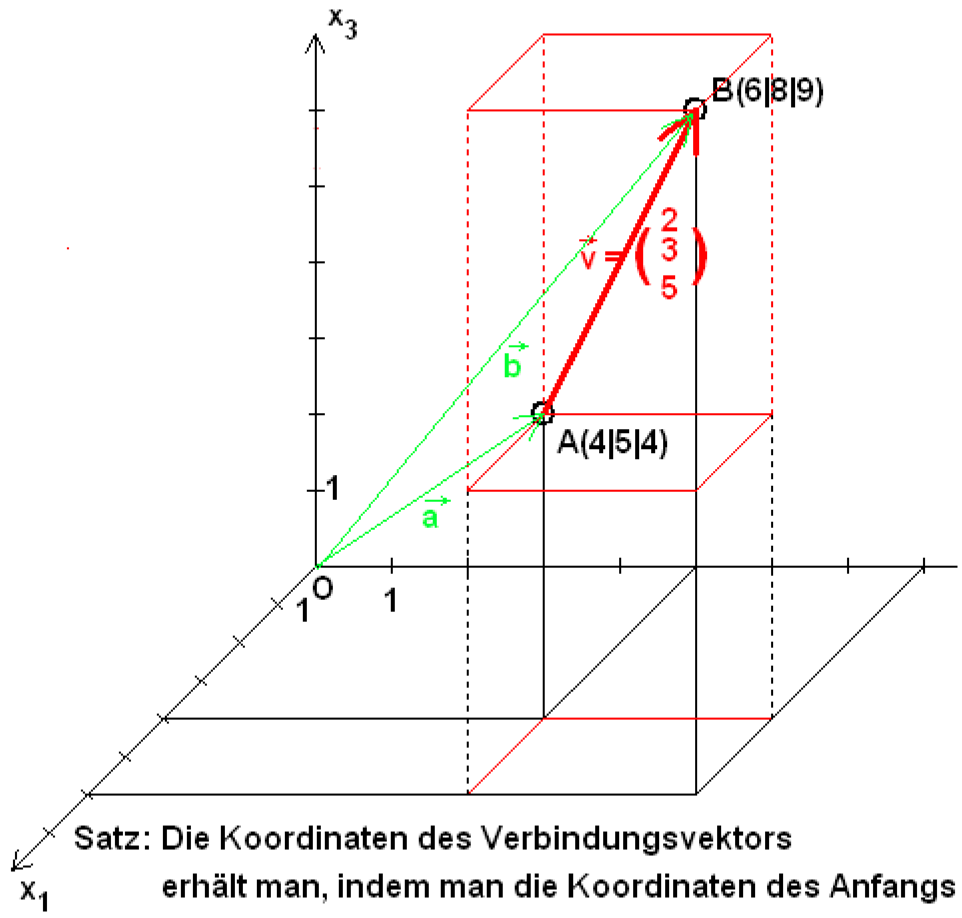
Bei vielen Betrachtungen wird auf Punkte verzichtet, sondern nur mit Vektoren gerechnet:

Statt der Punkte A, B , ...

verwendet man "Ortsvektoren" (hellgrün)

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$, ...,

Im Grunde sind dann die Punkte des affinen Raumes die Vektoren und der zugehörige Vektorraum die Translationen (Parallelverschiebungen).



Satz: Die Koordinaten des Verbindungsvektors erhält man, indem man die Koordinaten des Anfangs von den Koordinaten des Endpunktes abzieht.

$$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}6\\8\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$$

In jedem Lehrgang zur Vektorrechnung und affinen Räumen erarbeitet man mit Hilfe einer Basis des Vektorraumes und Einführung eines Ursprungs im Affinen Raum folgenden ...

Satz: Jeder Vektorraum der Dimension n ist isomorph zu K^n, wobei K der zugeordnete (Schief-)Körper ist.

Jeder affine Raum der Dimension n ist isomorph zu K^n.

(n endlich oder - als Kardinalzahl - unendlich.)

Affine Abbildungen, Ähnlichkeitsabbildungen, Kongruenzen

Im folgenden seinen die affinen Räume mindestens 2-dimensional.

Die **Geraden** des affinen Raumes sind die Punktmengen der Form

$g = \{A + x\cdot\vec{v} \mid x \in K\}$ für die Punkte A und von 0 verschiedenen Vektoren $\vec{v}$, d.h.

für alle Punktepaare (A,B) auf g gilt: $\overrightarrow{AB}$ ist linear abhängig von $\vec{v}$.

Drei verschiedene Punkte A,B,C heißen **kollinear**, wenn wenn sie auf einer Geraden liegen.

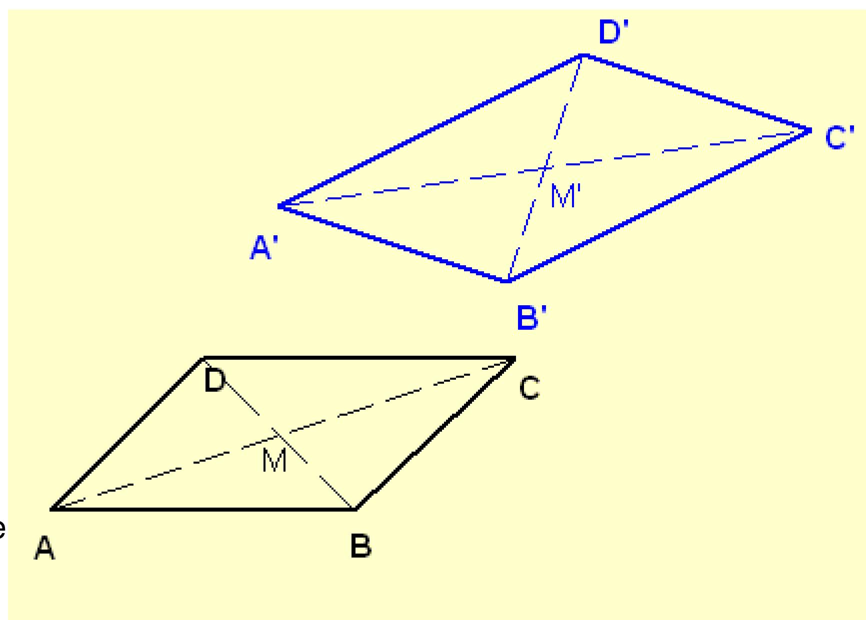
Definition:

I Eine bijektive Abbildung eines Punktraumes auf einen Punktraum heißt **Affinität**, wenn die Bildpunkte dreier kollinearer Punkte wieder kollinear und umgekehrt die Urbildpunkte dreier kollinearer Punkte kollinear sind.

Ist α eine Affinität, so werden Geraden g wieder auf Geraden $g'=\alpha(g)$ abbgebildet und das Urbild $g=\alpha^{-1}(g')$ einer Geraden ist wieder eine Gerade.

Beh.: Eine Affinität α bildet ein Parallelogramm ABCD auf ein Parallelogramm A'B'C'D' ab.

Beweis: Sei M der Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms ABCD. Dann ist M' der Schnittpunkt des Vierecks A'B'C'D. Folglich liegt das Viereck A'B'C'D' in einer Ebene (2-dim. affiner Unterraum).



Die Geraden (A'B') und (D'C') schneiden sich nicht (sonst hätten auch AB und DC einen Schnittpunkt). Sie sind also weder winschief noch haben sie einen Schnittpunkt. Also sind sie parallel. Analog folgt, dass die Geraden (B'C') und (A'D') parallel sind. q.e.d.

Anhand dieser Figur sieht man auch, dass die Mitte M von BD auf die Mitte M' von B'C' abgebildet wird. Eine Folgerung daraus ist: Eine Affinität ist teilverhältnistreu. (Jedenfalls für alle rationalen Teilverhältnisse. Für "irrationale" Teilverhälnisse muss noch die Stetigkeit algebraischer Operationen in K vorausgesetzt werden. Für reelle oder komplexe Skalare ist diese Voraussetzung erfüllt. Im Folgenden setzten wir die Teilverhältnistreue voraus.)

Eine Affinität α induziert somit durch folgende wohldefinierte Definition eine bijektive **lineare Abbildung** α des zugehörigen Vektorraumes

$$\alpha(\vec{v}) = \overrightarrow{A'B'} \text{ für } v = \overrightarrow{AB}.$$

α ist lineare Abbildung, da gilt:

$\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \alpha(\vec{v}) + \alpha(\vec{w})$ für $v=\overrightarrow{AB}$ und $w=\overrightarrow{BC}$

und $\alpha(k\cdot\vec{v}) = k\cdot\vec{v}$ für alle Skalare k und Vektoren $\vec{v}$, da α teilverhältnistreu ist.

Im Sinne der Informatik haben wir es bei einer Affinität α mit "überladenen" Funktionen zu tun.

α: A -> A' (Punkt auf Punkt)

α_G: g -> g' (Gerade auf Gerade)

α_V: $\vec{v} \to \vec{v}'$ (Vektor auf Vektor)

Zwischen den verschiedenen Abbildung α, α_G und α_V kann es keine Verwechsung geben, deshalb kann man sie (und wurden sie hier) mit dem gleichen Symbol bezeichnen: $\alpha = \alpha_G = \alpha_V$.

Hinweis: In der Literatur trifft man auf den Begriff der "affinen Abbildung". Dabei wird die Bijektivität nicht gefordert.

Ist der affine Raum euklidisch, das heißt existiert auf P noch eine Metrik, (A,B) -> d(A,B) ε R, so kann man noch definieren:

II Eine Affinität f heißt **Ähnlichkeitsabbildung**, wenn ein Faktor k <> 0 so existiert, dass d(f(A),f(B)) = k·d(A,B) für alle A,B ε P. (k heißt **Streckfaktor**.)

III Eine Affinität f heißt **Kongruenzabbildung**, wenn d(f(A),f(B)) = d(A,B) für alle A,B El. P.

Mit der Metrik auf P ist ein Skalarprodukt des Vektorraum verbunden, auf das ich hier nicht eingehen brauche. Wichtig dabei ist nur der Begriff "orthogonal".

Hat man ein Koordinatensystem $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ des affininen Raumes,

so ist $(O', \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \dots, \vec{e}\,'_n)$ ebenfalls ein Koordinatensystem.

Ist das Koordinatensystem ein kartesisches,

die Basis $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ also eine Orthonormalbasis des Vektorraumes,

so ist die zugehörige Affinität ähnlich, wenn die Vektoren $\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\dots,\vec{e}\,'_n$ paarweise orthogonal und gleich lang sind.

Die Ähnlichkeit ist dann eine Kongruenz(-abbildung), wenn

$(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ ebenfalls eine Orthonormalbasis ist.

Affinitäten im R^2

I Allgemein

Die Abbildungsgleichungen beziehen sich auf das Standardkoordinatensystem $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

mit O=O=0|0|0) und $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$, und $e_2 = \binom{0}{1}$.

Das Koordinatensystem ist festgelegt durch die Punkte O(0|0|0), E_1(1|0), E_2(0|1).

Eine Affinität wird dann dargestellt durch die Abbildungsgleichungen:

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad \text{oder } \vec{x}\,' = A\cdot\vec{x} + \vec{b} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation der Matrix $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ mit einem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$ ist definert als

$$M\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot x_1 + c\cdot x_2 \\ b\cdot x_1 + c\cdot x_2 \end{pmatrix}$$

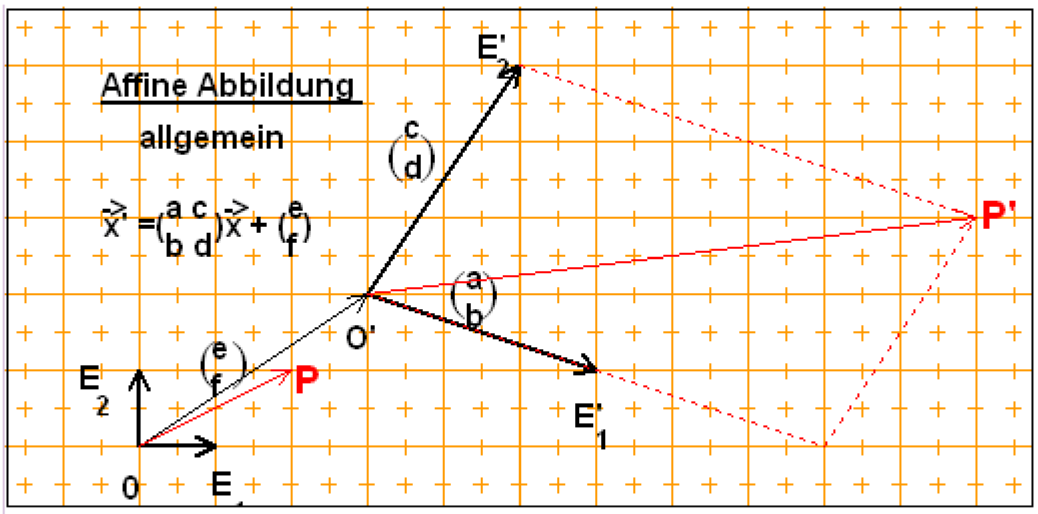
Für $P(x_1|x_2)$ und $P'(x'_1|x'_2)$ mit

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$

sowie $\overrightarrow{OO'} = \binom{e}{f}$ gilt:

$$\vec{x}\,' = \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \binom{a}{b}\cdot x_1 + \binom{c}{d}\cdot x_2$$

$$= \binom{a}{b}\cdot x_1 + \binom{c}{d}\cdot x2 + \binom{e}{f}$$



$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

O wird auf O'(e|f), e_1 auf $\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und e_2 auf $\vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ abgebildet.

Die Affinität ist eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn

die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen und gleich lang sind, d.h

wenn $ac + bc = 0$ und $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ ist.

Die Affinität ist eine Kongruenzabbildung, wenn

die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen und die Länge 1 haben, d.h

wenn $ac + bc = 0$, $a^2 + b^2 = 1$ und $c^2 + d^2 = 1$ ist.

Diese Eigenschaft ist unabhängig vom "Verschiebungsvektor" $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

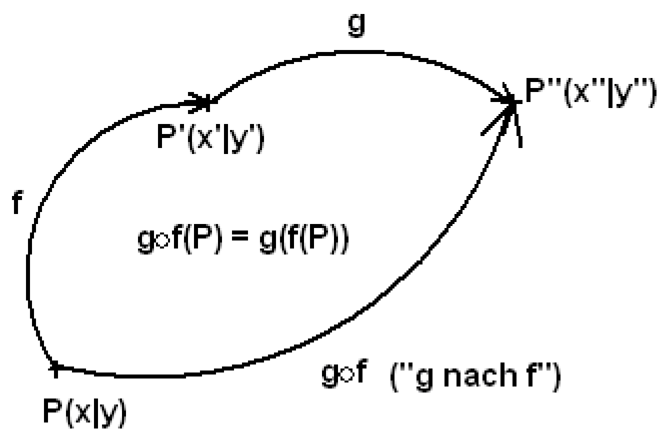
Um die Abbildungsmatrix aufzustellen, genügt es deshalb,

das Bild $\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ von $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und das Bild $\vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ von $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu finden.

Die Abbildungsgleichung der **Verkettung von Abbildungen** berechnet sich folgendermaßen:

Sei die erste Abbildung $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a1 & c1 \\ b1 & d1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} e1 \\ f1 \end{pmatrix}$,

und die zweite Abbildung $\vec{x}'' = \begin{pmatrix} a2 & c2 \\ b2 & d2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}' + \begin{pmatrix} e2 \\ f2 \end{pmatrix}$



Dann gilt für die Verkettung (=Hintereinanderausführung) der beiden Abbildungen:

$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} a2 & c2 \\ b2 & d2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a1 & c1 \\ b1 & d1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} e1 \\ f1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} e2 \\ f2 \end{pmatrix}$, also

$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} a3 & c3 \\ b3 & d3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} e3 \\ f3 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} a3 & c3 \\ b3 & d3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1 & c1 \\ b1 & d1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a2 & c2 \\ b2 & d2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} e3 \\ f3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a2 & c2 \\ b2 & d2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e1 \\ f1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e2 \\ f2 \end{pmatrix}$.

Das **Produkt** der zwei Matrizen oder einer Matrix mit einem Vektor ist hier:

$\begin{pmatrix} a1 & c1 \\ b1 & d1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a2 & c2 \\ b2 & d2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1a2+c1b2 & a1c2+c1d2 \\ b1a2+d1b2 & b1c2+d1d2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a2 & c2 \\ b2 & d2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e1 \\ f1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a2e1+c2f1 \\ b2e1+d2f1 \end{pmatrix}$.

Die Umkehrabbildung der Affinität

$\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ wird ermittelt, indem diese Gleichung nach $\vec{x}$ aufgelöst wird:

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x}' - \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \vec{x}' - \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ wobei

$\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ist.

Da Affinitäten stets umkehrbar sind, ist die Determinante $D = ad - bc \neq 0$.

Nach Vertauschen von $\vec{x}'$ und $\vec{x}$ erhält man als Abbildungsgleichung der Umkehrabbildung:

$$\boxed{\vec{x}' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \vec{x} - \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}$$

Die **Umkehrabbildungen der folgenden Abbildungen** (siehe unten) sind:

I a) Punktspiegelung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$ Umkehrabbildung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$ (dieselbe)

b) Punktspiegelung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ Umkehrabbildung $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ (dieselbe)

c) Drehung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & +\cos(\alpha) \end{pmatrix} \vec{x}$ Umkehrabbildung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & +\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & +\cos(\alpha) \end{pmatrix} \vec{x}$

d) Drehung um Z(e|f): Drehung: $\vec{x'} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & +\cos(\alpha)\end{pmatrix}\vec{x} - \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & +\sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & +\cos(\alpha)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$

Umkehrabbildung: $x' = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & +\sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & +\cos(\alpha)\end{pmatrix}\vec{x} - \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & +\sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & +\cos(\alpha)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$

III a) Zentrische Streckung um O: $\vec{x'} = 3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$ Umkehrabbildung: $\vec{x'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$

b) Zentische Streckung um Z(3|2) mit Streckfaktor -3:

$\vec{x'} = -3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + \begin{pmatrix}12\\ 8\end{pmatrix}$ Umkehrabbildung: $\vec{x'} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + \begin{pmatrix}4\\ 8/3\end{pmatrix}$

c) Ähnlichkeitsabbildung: $\vec{x'} = \begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$. Umkehrabbildung: $\vec{x'} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - \frac{1}{25}\begin{pmatrix}2\\ 14\end{pmatrix}$.

IV a) Scherung: $\vec{x'} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$ Umkehrabbildung: $\vec{x'} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$

b) senkrechte Parallelprokektion: $\vec{x'} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a/b\end{pmatrix}\vec{x}$ Umkehrabbildung: $\vec{x'} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & b/a\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$

II Beispiele für Kongruenzen im R^2

Hinweis: Die Schreibweise $\vec{x'} = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + \begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$ bedeutet für $\vec{x} = \begin{pmatrix}x1\\ x2\end{pmatrix}$ und $\vec{x'} = \begin{pmatrix}x1'\\ x2'\end{pmatrix}$:

$$\left|\begin{array}{l} x1' = a\cdot x1 + c\cdot x2 + e\\ x2' = b\cdot x1 + d\cdot x2 + f\end{array}\right|$$

Die Koeffizienten der "Matrix" $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ und der Vektor $\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$ ergeben sich aus der Beziehung

$\vec{e'_1} = a\cdot\vec{e_1} + b\cdot\vec{e_2}$, $\vec{e'_2} = c\cdot\vec{e_1} + d\cdot\vec{e_2}$ und $\overrightarrow{OO'} = e\cdot\vec{e_1} + f\cdot\vec{e_2}$

Im Normalfall ist $\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ und damit $\vec{e'_1} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$, $\vec{e'_2} = \begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$ sowie $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$.

a) Punktspiegelung an O(0|0)

$\vec{e'_1} = \begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$ (erste Zeile ...

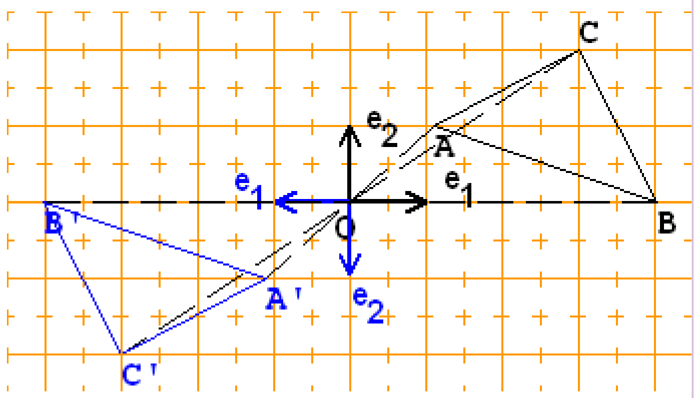
...der Matrix $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$

$\vec{e'_2} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$ (zweite Zeile ...

$\vec{x'} = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\vec{x}$, also $\vec{x'} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\vec{x}$.

Zum Beispiel A(1|1)->A'(-1|-1),

B(4|0)->B'(-4|0) und C(3|2)->C'(-3|-2).



---

b) Punktspiegelung an O(3|2)

Dieselbe Matrix wie bei a)

$\vec{e'_1}$ und $\vec{e'_2}$ bestimmen allein die Matrix

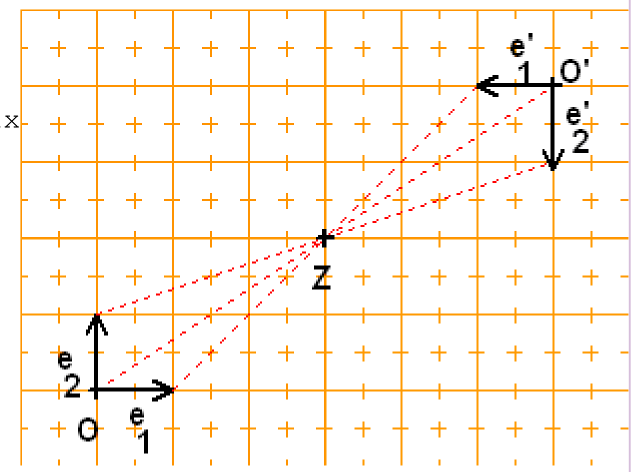
Dazu kommt der "Verschiebungsvektor"

$\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix} = \overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix}6\\ 4\end{pmatrix}$

$\vec{x'} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}6\\ 4\end{pmatrix}$

Zum Beispiel: A(4|4)->A'(2|0),

B(2|4)->B'(4|0) und C'(3|3)->C'(3|1)



---

c) Drehung um den Ursprung mit dem Winkel $\alpha = 30°$.

$e'_1 = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$ $e'_2 = \begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

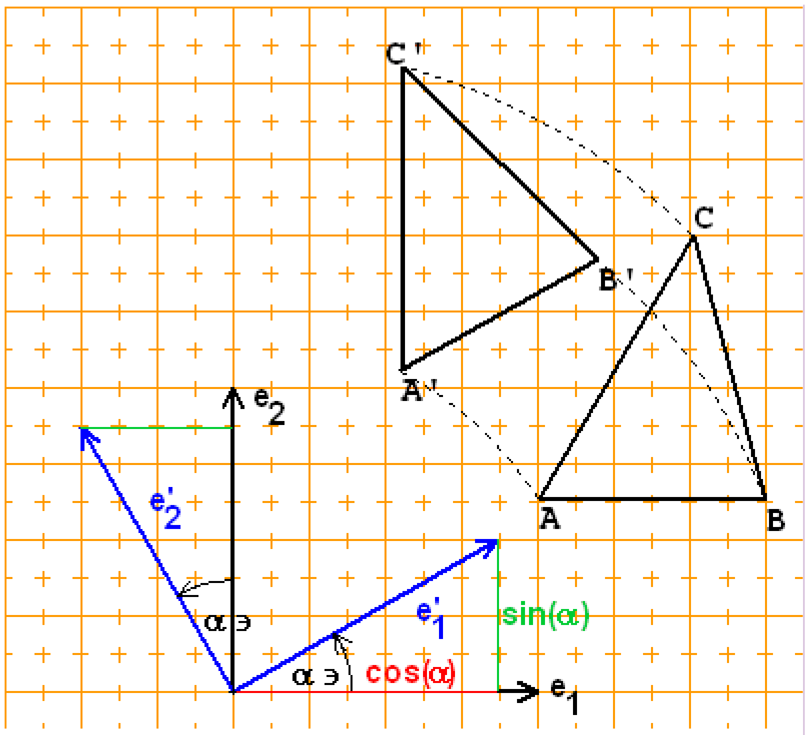
Also sind die Abbildungsgleichungen

$\vec{x'} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & +\cos(\alpha)\end{pmatrix}\vec{x}$

Für $\alpha = 30°$ also

$\vec{x'} = \begin{pmatrix}0{,}866 & -0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}866\end{pmatrix}\vec{x}$

Zum Beispiel A(4|2,5) -> A'(2,21|4,17)
B(7|1,5) -> B'(4,81|5,67)
C(6|6) -> C'(2,20|8,20)



d) Drehung:
Drehwinkel: $\alpha = 30°$ um Drehzentrum Z(3|2).

Diese Drehung kann man sich vorstellen als

Verkettung der folgenden Abbildungen

Parallelverschiebung Z->O:

$\vec{x}_1 = \vec{x} - \vec{b}$ mit $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Drehung um O (siehe Beispiel c) $\vec{x}_2 = M\cdot\vec{x}_1$

mit $M = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & +\cos(\alpha)\end{pmatrix}$

und Verschiebung O->Z $\vec{x'} = \vec{x}_2 + \vec{b}$

Somit $\vec{x'} = M\cdot(\vec{x} - \vec{b}) + \vec{b} = M\cdot\vec{x} + \vec{b} - M\cdot\vec{b}$

Mit $\vec{b} - M\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0,866 & -0,5\\ 0,5 & 0,866\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

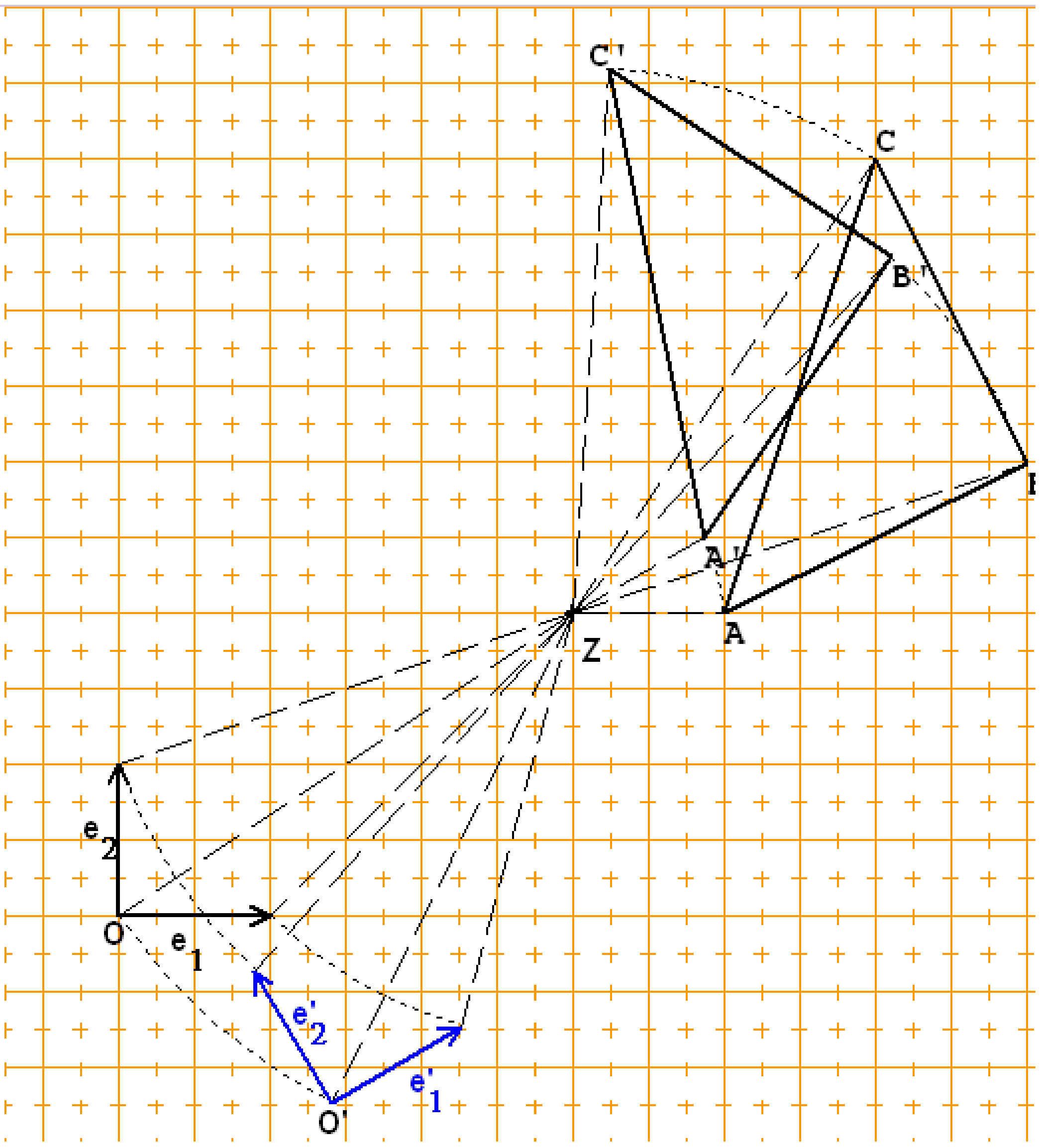
$= \begin{pmatrix}1,401\\ -1,232\end{pmatrix}$ also

$$\boxed{\vec{x'} = \begin{pmatrix}0,866 & -0,5\\ 0,5 & 0,866\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + \begin{pmatrix}1,401\\ -1,232\end{pmatrix}}$$

Beispiel: A(4|2) -> A'(3,867|2,5)

B(6|3) -> B'(5,098|4,366)

C(5|5) -> C'(3,232|5,598)

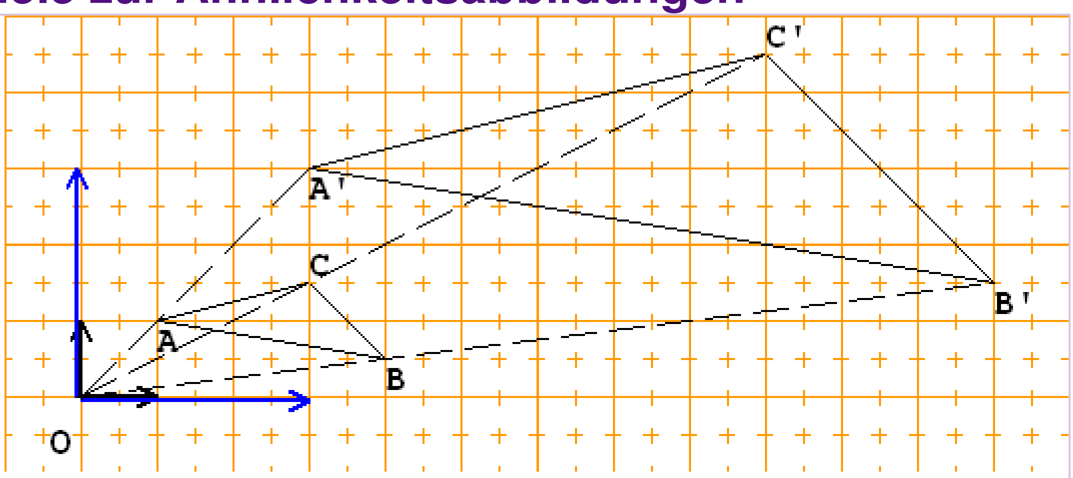


III Beispiele zur Ähnlichkeitsabbildungen

a) **Zentrische Streckung.**
Zentrum O. Streckfaktor 3.

$\vec{x'} = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$ Zum Beispiel:

A(1|1) -> A'(3|3)
B(4|0,5) -> B'(12|1,5)
C(3|1,5) -> C'(9|4,5)



b) Zentische Streckung mit Zentrum Z(3|2)
und Streckfaktor k = -3.

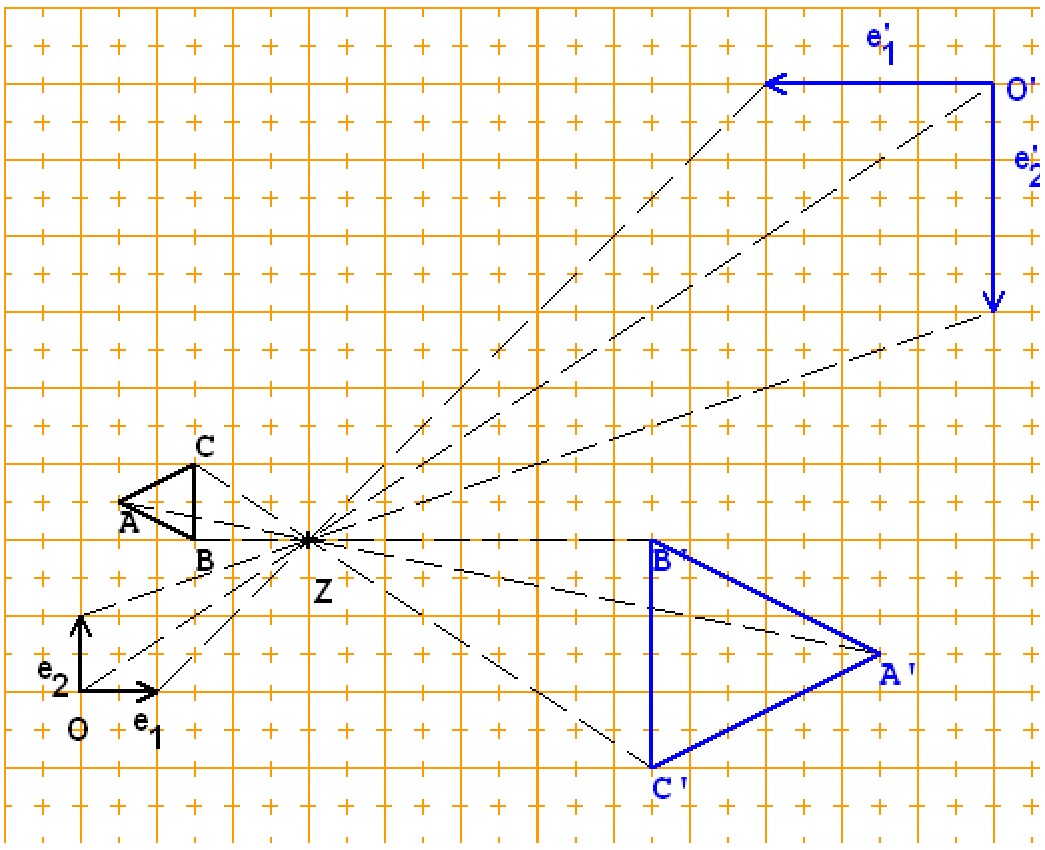
$\vec{e}_1 \to \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 \to \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\8\end{pmatrix}$. Die Abbildungsgleichung ist

demnach: $\vec{x'} = \begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + \begin{pmatrix}12\\8\end{pmatrix}$

Zum Beispiel: A(0,5|2,5)-> A'(10,5|0,5)
B(1,5|2) -> B'(7,5|2)

C(1,5|3) -> C'(7,5|-1)



c) Die Ähnlichkeitsabbildung, mit

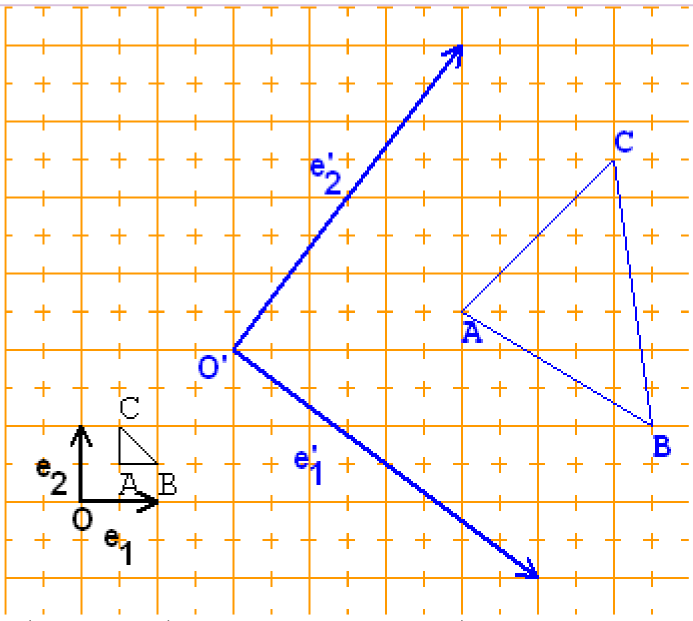
$\vec{e'_1} = \binom{4}{-3}$ und $\vec{e'_2} = \binom{3}{4}$

$\vec{OO'} = \binom{e}{f} = \binom{2}{2}$.

Diese Affinität ist eine Ähnlichkeitsabbildung, da $\vec{e'_1}$ und $\vec{e'_2}$ senkrecht aufeinander stehen und die gleiche Länge 5 haben.

$\vec{x'} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \binom{2}{2}$. Zum Beispiel:

A(0,5|0,5) -> A'(5,5|2,5)
B(1|0,5) -> B'(7,5|1)
C(0,5|1) -> C'(7|4,5)



Diese Abbildung kann man sich als Verkettung einer Drehung um O(0|0) mit 36,87°, einer zentrischen Streckung um O(0|0 mit dem Streckfaktor 5 und einer Parallelverschiebung um $\binom{2}{2}$ vorstellen.

IV Beispiel einer affinen Abbildung, ...

... die weder eine Kongruenzabbildung noch eine Ähnlichkeitsabbild ist.

a) **Die Scherung**, welche die Rechtsachse fest lässt
mit $E_1(1|0) \to E'_1(1|0)$

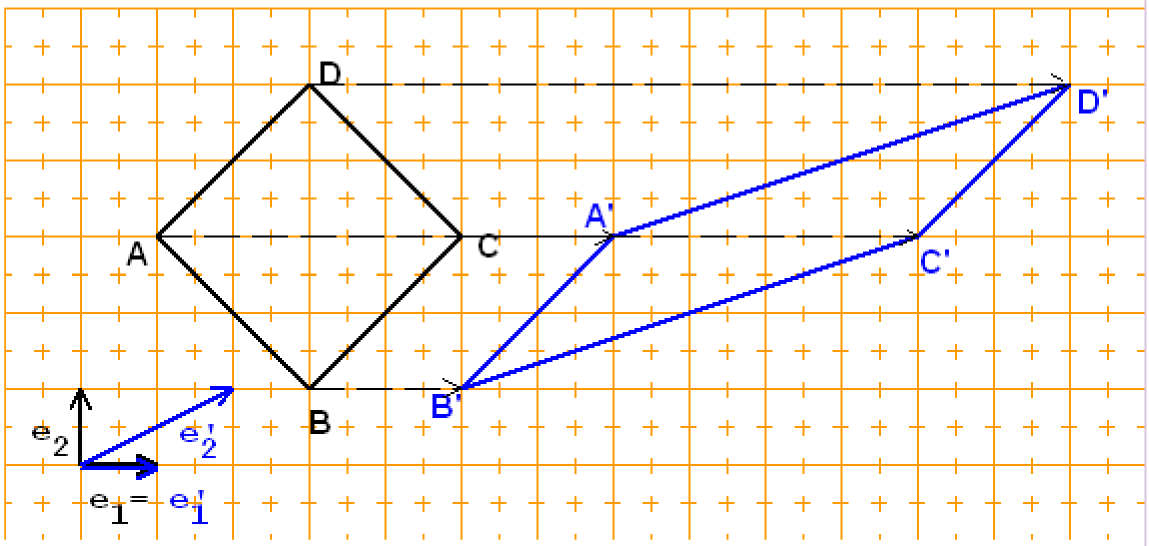
und $E_2(0|1) \to E'_2(2|1)$

$\vec{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ zum Beispiel

A(1|3) -> A'(7|3)
B(3|1) -> B'(5|1)
C(5|3) -> C'(11|3)
D(3|5) -> D'(13|5)

B "wandert um 2 nach rechts",
A und C "wandern um 6 nach recht",
D "wandert um 10 nach rechts":

Je größer der Abstand von der x-Achse um so größer die "Wanderung".



b) **Die senkrechte Parallelprojektion**, welche die Rechtsachse fest lässt
mit $E_1(1|0) \to E'_1(1|0)$

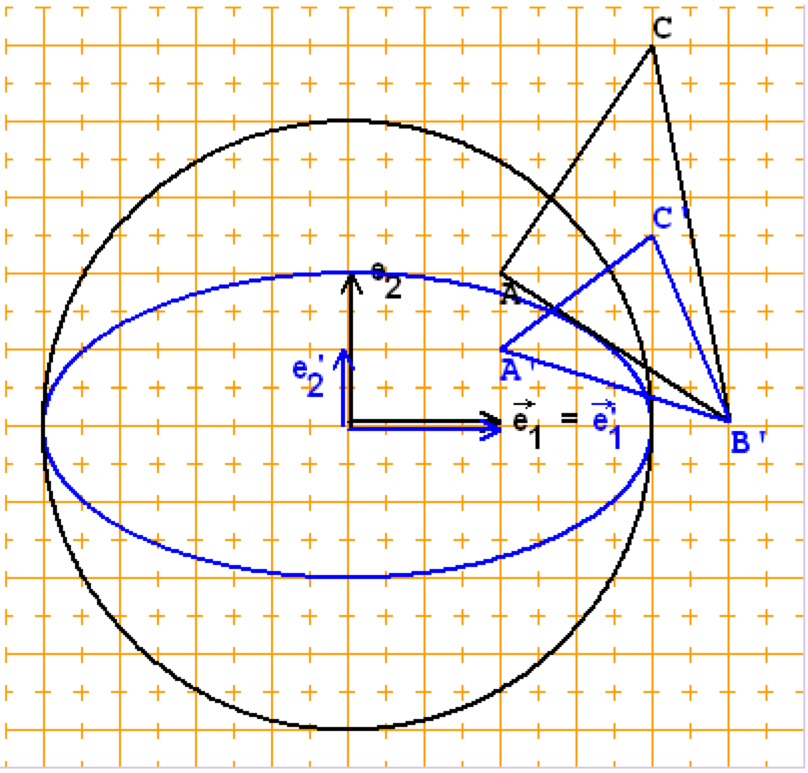
und $E_2(0|1) \to E'_2(0|\frac{1}{2})$

$\vec{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ zum Beispiel

A(1|1) -> A'(1|1/2)

B(2 1/2|0) -> B'(2 1/2|0)
C(2|2 1/4) -> C'(2|1 1/8)
Die Punkte wandern senkrecht zur x-Achse. Der Abstand halbiert sich.

Aus einem Kreis wird eine Ellipse.



V Koordinatentransformationen in R^2

Koordinatentransformationen hängen eng mit Affinitäten zusammen:

Betrachtet man die Affinität, die das Koordinatensystem $(0,E_1,E_2)$ auf das Koordinatensystem (O',E'_1,E'_2) abbildet, dann ist die Abbildungsgleichung, welche die Koordinaten eines Punktes im zweiten Koordinatensystem aus den Koordinaten des ersten Koordinatensystems berechnet, gerade die Umkehrabbildung dieser Affinität.

Sei mit O'(e|f) und $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

ein zweites Koordinatensystem festgelegt.

Dann gilt für die Koordinaten $(x_1'|x_2')$ von $P(x_1|y_1)$

bezüglich des Koordinatensystems $(O',\vec{e}_1',\vec{e}_2')$

die Beziehung $\vec{e}_1'x_1' + \vec{e}_2'x'_2 = \vec{e}_1x_1 + \vec{e}_2x_2 - \vec{OO'}$

Mit mit $\vec{x'} = \begin{pmatrix}x1'\\x2'\end{pmatrix}$ berechnet sich auf das erste

Koordinatensystem bezogen: $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x1'\\x2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x1\\x2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$,

also $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\cdot\vec{x'} = \vec{x} - \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix}x1\\x2\end{pmatrix}$

Achtung: $\begin{pmatrix}x1'\\x2'\end{pmatrix}$ sind keine Koordinaten bez. $(0, \vec{e}_1,\vec{e}_2)$!

Sei $\begin{pmatrix}a'&c'\\b'&d'\end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d&-c\\-b&a\end{pmatrix}$ die inverse Matrix,

dann folgt $\boxed{\vec{x'} = \begin{pmatrix}a'&c'\\b'&d'\end{pmatrix}\vec{x} - \begin{pmatrix}a'&c'\\b'&d'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}}$

Diese Abbildungsgleichungen sind formal dieselben,

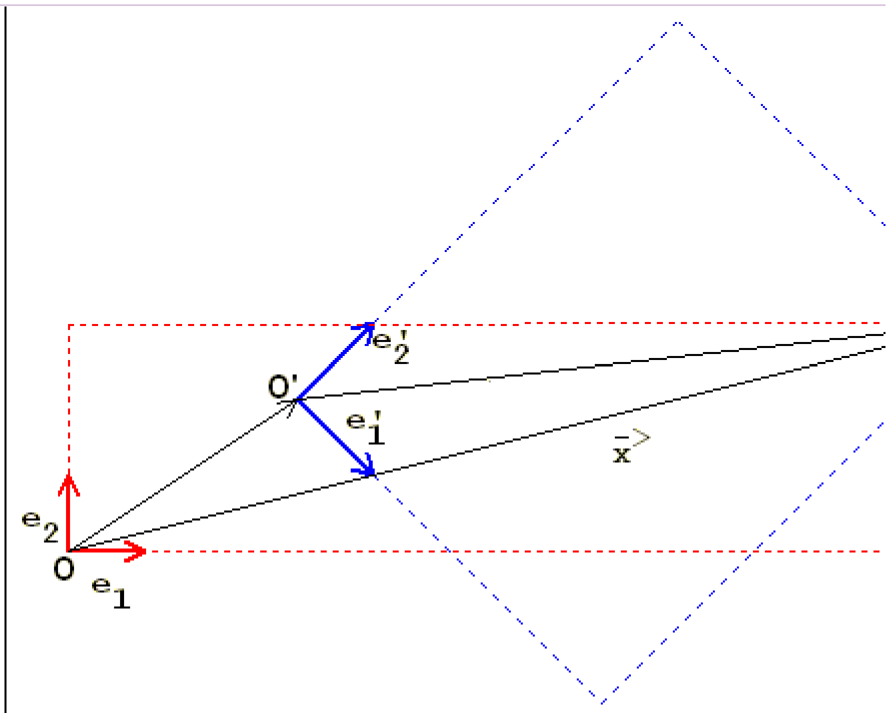
wie die **Umkehrabbildung** der Affinität f,

die $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ auf $(O',\vec{e}_1',\vec{e}_2')$ abbildet.

Der Punkt Q(4|5) (siehe rechts) wird

auf P(12|5) abgebildet. Also ist Q(4|5)

das Urbild von f.



Hier: $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ Mit $\begin{pmatrix}a'&c'\\b'&d'\end{pmatrix}$ =

folgt: $\vec{x'} = \begin{pmatrix}0,5&-0,5\\0,5&0,5\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + \begin{pmatrix}-0,5\\-2,5\end{pmatrix}$

Zum Beispiel hat P(12|3) im zweiten Koordinatensyst

die Koordinaten $\begin{pmatrix}0,5&-0,5\\0,5&0,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0,5\\-2,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$

Somit P(12|5)= $P_{\text{Koordinaten bezogen auf das zweite System}}$(4|5).

Das bedeutet $\vec{OP} = 12\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ und $\vec{O'P} = 4\vec{e}_1' + 5\vec{e}_2'$.

Affinitäten im R^3

I Allgemein

Ähnlich wie im zweidimensionalen Fall, erhält man

die Abbildungsvorschrift der Affinität

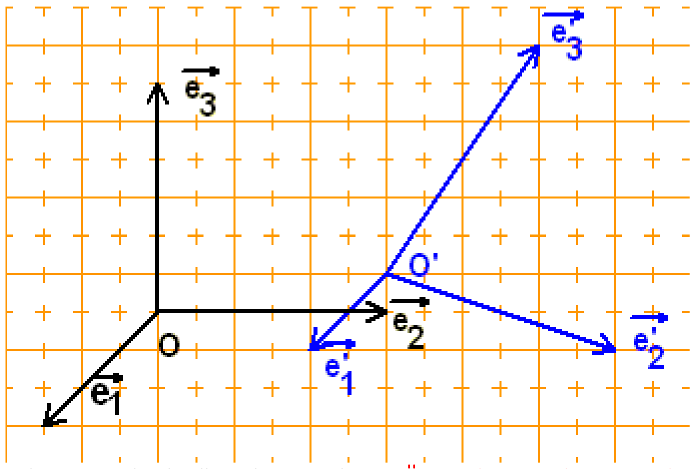
$\vec{x'} = \begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}\cdot\vec{x} + \begin{vmatrix}j\\k\\l\end{vmatrix}$ aus

$\vec{e}_1' = \begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$, $\vec{e}_2' = \begin{vmatrix}d\\e\\f\end{vmatrix}$, $\vec{e}_3' = \begin{vmatrix}g\\h\\i\end{vmatrix}$ und $\vec{OO'} = \begin{vmatrix}j\\k\\l\end{vmatrix}$.

[Die Koordinaten bezogen auf (O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$).]

Die Multiplikation der Matrix mit einem Vektor ist definert als

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax1 + dx2 + gx3 \\ bx1 + ex2 + hx3 \\ cx1 + fx2 + ix3 \end{vmatrix}$$



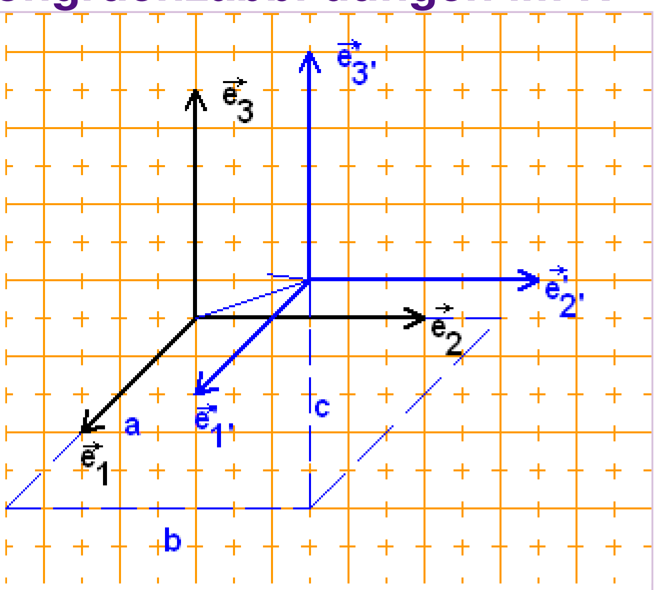
Die Affinität ist eine Ähnlichkeitsabbildung wenn die Vektoren $\vec{e}'_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}'_3$ gleich lang sind und paarweise senkrecht aufeinander stehen. Haben diese Vektoren zudem die Länge 1, handelt es sich um eine Kongruenzabbildung.

II Beispiele für Kongruenzabbildungen im R^3

a) Translation (Parallelverschiebung)

Abbildungsgleichung: $\vec{x}' = \vec{x} + \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$

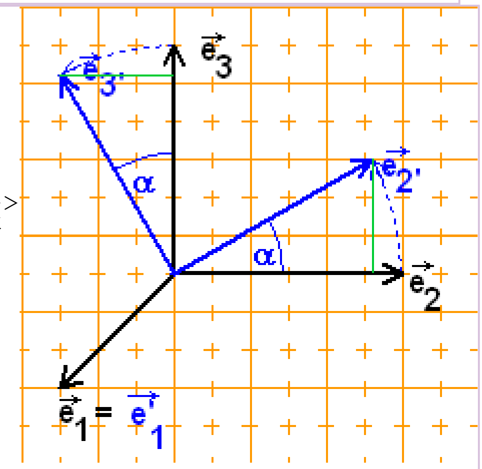
Hier: $\vec{x}' = \vec{x} + \begin{vmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix}$



b) Rotation um die x_1-Achse:

$\vec{e}'_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $\vec{e}'_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{vmatrix}$, $\vec{e}'_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{vmatrix}$

Abbildungsgleichung: $\vec{x}' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} \cdot \vec{x}$



Analog leitet man die folgenden zwei Abbildungsgleichungen her:

c) Rotation um die x_2-Achse

$$\vec{x}' = \begin{vmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{vmatrix} \cdot \vec{x}$$

d) Rotation um die x_3-Achse:

$$= \begin{vmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{x}$$