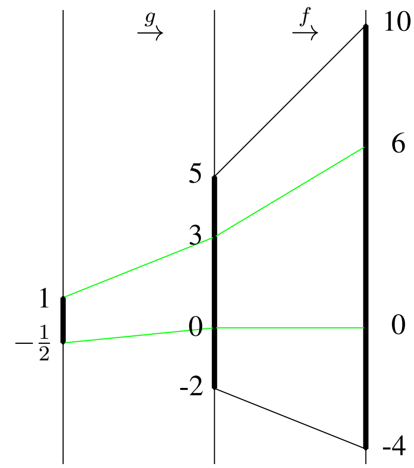
Verkettung von Funktionen

Aufgabe (aus LS Analysis Eins, Klett 73967, Seite 48 Nr. 6a)
Gegeben sind $f = (x \mapsto 2x)\big|[-2;5]$ und $g = (x \mapsto 2x+1)\big|[-\frac{1}{2};1]$. Ermittle $f \circ g$ und $g \circ f$ sowie die Definitionsmengen $D_{f \circ g}$ und $D_{g \circ f}$.

Lösung
I) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = 2(2x+1) = 4x+2$ für alle $x \in D_{f \circ g}$, wobei

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in [-\tfrac{1}{2};1] \wedge 2x+1 \in [-2;5]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in [-\tfrac{1}{2};1] \wedge x \in [-\tfrac{3}{2};2]\} \\ &= [-\tfrac{1}{2};1] \cap [-\tfrac{3}{2};2] \\ &= [-\tfrac{1}{2};1]. \end{aligned}$$

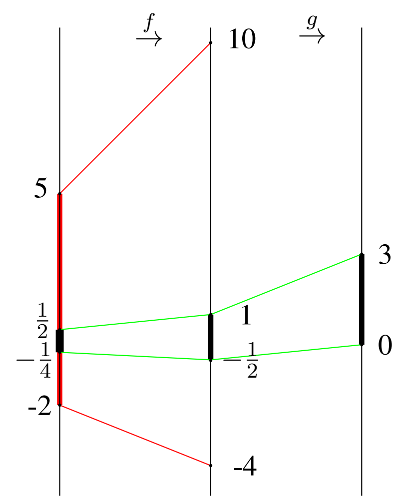


Da $g\,(D_g) = g\left([-\frac{1}{2};1]\right) = \mathcal{W}_g = [0;3]$ und $[0;3] \subset [-2;5] = D_f$, so $\mathcal{W}_g \subset D_f$. Damit lautet die gesuchte Funktion

$$f \circ g = (x \mapsto 4x+2)\big|[-\tfrac{1}{2};1].$$

II) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2 \cdot 2x + 1 = 4x+1$ für alle $x \in D_{g \circ f}$, wobei

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in [-2;5] \wedge 2x \in [-\tfrac{1}{2};1]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in [-2;5] \wedge x \in [-\tfrac{1}{4};\tfrac{1}{2}]\} \\ &= [-\tfrac{1}{4};\tfrac{1}{2}]. \end{aligned}$$



$f(D_f) = f([-2;5]) = \mathcal{W}_f = [-4;10]$, aber $[-4;10] \not\subset [-\frac{1}{2};1] = D_g$. Nur diejenigen $x \in D_f$, die zugleich die Bedingung $x \in [-\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$ erfüllen, werden in D_g hinein abgebildet, so dass g diese $f(x)$-Werte weiter abbilden kann. Die gesuchte Funktion ist also

$$g \circ f = (x \mapsto 4x+1)\big|[-\tfrac{1}{4};\tfrac{1}{2}].$$

Bemerkung. Der wesentliche Teil bei der Ermittlung der Verkettungsfunktion ist nicht die (triviale!) Bildung des Funktionstermes sondern die Bestimmung der Definitionsmenge der Verkettungsfunktion.