Hauptprüfung Abiturprüfung 2023 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie – Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe B2

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Körper ABCDEF mit A(6|3|0), B(0|6|0), C(3|0|0), D(6|3|6), E(0|6|6) und F(3|0|12).

a) Die Punkte D, E und F liegen in der Ebene L.
Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. (2 VP)
(Teilergebnis: $L: 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 42$)

b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der x_1x_2-Ebene einschließt. (1,5 VP)

c) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ berechnet werden. Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung. (1,5 VP)
Berechnen Sie das Volumen des Körpers ABCDEF. (1,5 VP)

d) Die Ebene N_k enthält die x_3-Achse und den Punkt $P_k(1-k \mid k \mid 0)$ mit $k \in \left]0;1\right[$.
Welche Kanten des Körpers von N_k geschnitten werden, ist abhängig von k.
Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche $\left]a;b\right[$, für die N_k für alle Werte von $k \in \left]a;b\right[$ jeweils die gleichen Kanten des Körpers schneidet.
Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an. (2 VP)

e) Auf der Kante AD liegt der Punkt Q, auf der Kante BE der Punkt R(0|6|2).
Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel.
Bestimmen Sie die x_3-Koordinate von Q. (2,5 VP)

f) Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der x_1x_2-Ebene liegt und dabei eine positive x_2-Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung:

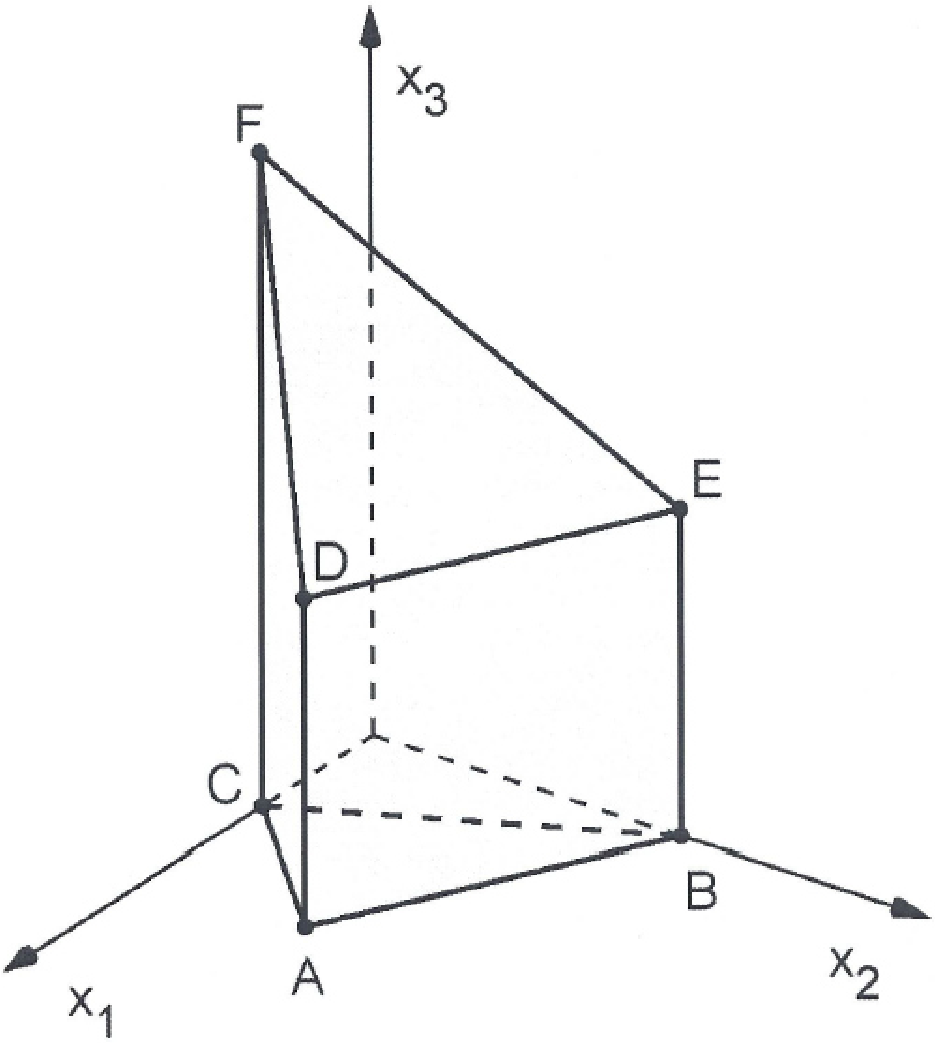
$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow t = 0{,}8 \text{ , d.h. } S(4{,}8|3{,}6|0)$$

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + \left|\overrightarrow{CS}\right| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.

(1,5 VP)

Anlage zu Aufgabe B2:



Lösungen

Aufgabe B2

a) *Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.*

Parameterform von L: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von L: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 27 \end{pmatrix}$ bzw. vereinfacht $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ansatz der Koordinatenform: $L: 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = d$
Einsetzen von D(6|3|6): $12 + 12 + 18 = 42 \Rightarrow d = 42$
Koordinatenform:

Prüfen Sie, ob die beiden anderen Werbeflächen einen rechten Winkel einschließen.

Die beiden anderen Werbeflächen bilden einen rechten Winkel, wenn gilt:
$\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FD} = 0$.
Der Punkt D hat die Koordinaten D(5|-2|15).

$$\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

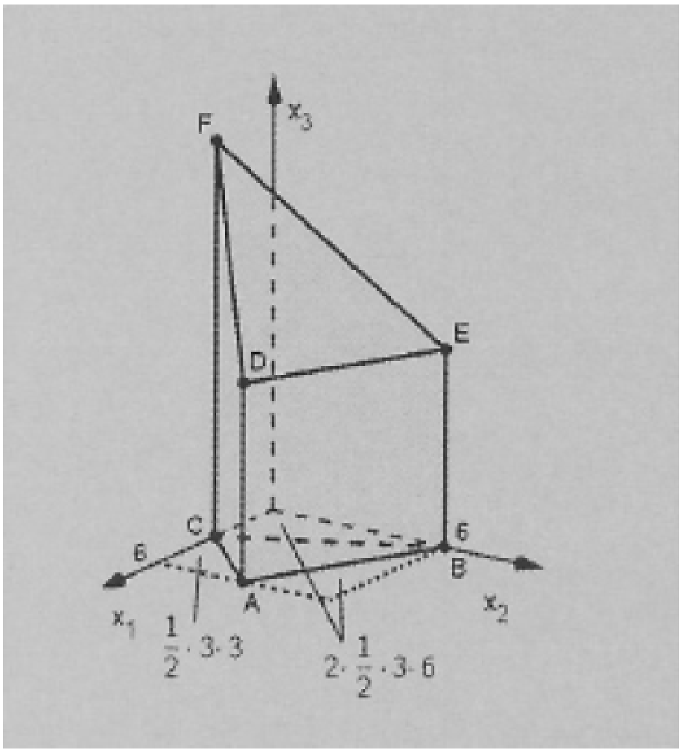
Das heißt, die beiden anderen Seitenflächen schließen einen rechten Winkel ein.

b) *Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der x_1x_2-Ebene einschließt.*

Die x_1x_2-Ebene besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{4+16+9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{3}{\sqrt{29}} \quad \Rightarrow \alpha \approx 56{,}1^\circ$$

c) *Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.*



Idee der Formel: $A_{ABC} = A_{Quadrat} - 2\cdot A_{Dreieck\ OBC} - A_{Dreieck}$

Berechnen Sie das Volumen des Körpers ABCDEF.

Der Körper setzt sich zusammen aus einem Prisma der Höhe 6 mit der Grundfläche ABC und einer darauf aufgesetzten Pyramide, deren Grundfläche genauso groß ist wie das Dreieck ABC (nur um 6 Längeneinheiten nach oben versetzt)

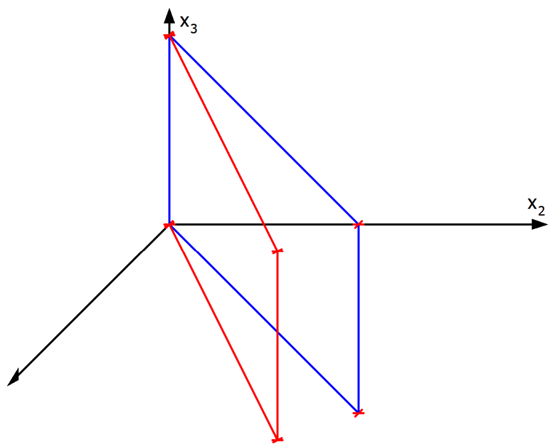
$$A_{ABC} = 6\cdot 6 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6 = \frac{27}{2}$$

$$V = V_{Prisma} + V_{Pyramide} = A_{ABC}\cdot h_{Prisma} + \frac{1}{3}\cdot A_{ABC}\cdot h_{Pyramide} = \frac{27}{2}\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot\frac{27}{2}\cdot 6 = 108$$

d) *Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an.*

Die Ebene N_k enthält die x_3-Achse und den Punkt $P_k(1-k\,|\,k\,|\,0)$ mit $k \in \left]0;1\right[$.
Für k = 0 (obwohl der Wert selbst nicht zulässig ist) ergäbe sich der Punkt $P_0(1\,|\,0\,|\,0)$. Die Ebene N_0 wäre die x_1x_3-Ebene.
Für k = 1 (obwohl der Wert selbst nicht zulässig ist) ergäbe sich der Punkt $P_1(0\,|\,1\,|\,0)$. Die Ebene N_1 wäre die x_2x_3-Ebene.
Somit stellt die Ebenenschar N_k alle Ebenen dar, die sich zwischen der x_1x_3-Ebene und der x_2x_3-Ebene bewegen und die x_3-Achse enthalten.

Zwei der Ebenen sind in folgender Abbildung eingezeichnet.



Bewegt sich die Ebenenschar von der x_1x_3-Ebene entgegen dem Uhrzeigersinn weg, schneiden sich die Ebenen in den Kanten CD, FA, FE und BC.
Dies gilt so lange, bis die Ebenenschar die Gerade durch OA enthält.

Gleichung der Geraden OA: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Prüfung, für welchen Wert von k die Punkteschar P_k auf g liegt:

$$\begin{pmatrix} 1-k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1-k &= 6r \\ k &= 3r \end{aligned}$$

Einsetzen von der 2.Zeile in die 1.Zeile: $1-3r = 6r \Rightarrow r = \frac{1}{9}$

Daraus folgt $k = \frac{1}{3}$.

Für $k \in \left]0;\frac{1}{3}\right[$ schneiden sich die Ebenen in den Kanten CD, FA, FE und BC.

Für $k \in \left]\frac{1}{3};1\right[$ schneiden sich die Ebenen in den Kanten AB, DE, FE und BC.

Dies ist der gesuchte größte Bereich.

e) *Bestimmen Sie die x_3-Koordinate von Q.*

Der Punkt Q hat die Koordinaten $Q(6\,|\,3\,|\,u)$ mit $0 \le u \le 6$.
Da im Punkt Q sich ein rechter Winkel befindet muss gelten:

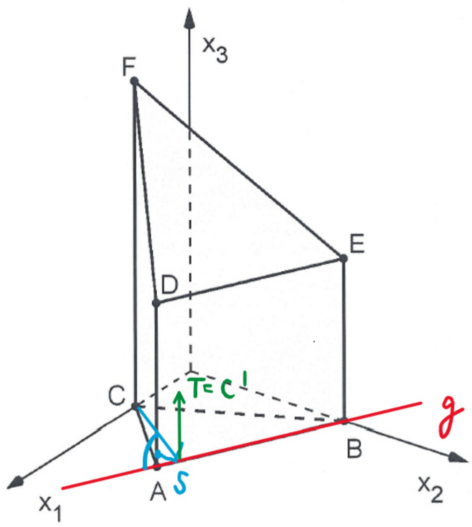
$$\overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QR} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12-u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2-u \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 18 - 9 + 24 - 14u + u^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 14u + 33 = 0 \qquad \Rightarrow u_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196-132}}{2} = \frac{14 \pm 8}{2} \qquad u_1 = 11 \qquad u_2 = 3$$

Da $0 \le u \le 6$ gelten muss, ist die x_3-Koordinate von Q gleich 3.

f) *Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.*

Der Term $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ gibt die Parameterform der Geraden g an, die durch A und B verläuft.
Wenn t = 0,8 in die Geradengleichung g eingesetzt wird, ergibt sich der Punkt S.
Somit muss S auf g liegen.



Aus der Formel $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + \left|\overrightarrow{CS}\right| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

kann man ablesen:
Der Punkt T befindet sich genau oberhalb vom Punkt S mit dem Abstand $\overline{CS}$.

Der Term $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschreibt den Vektor $\overrightarrow{CS}$, der vom Punkt C(3|0|0) auf einen Punkt S der Gerade g zeigt.

Da das Skalarprodukt $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$ ist, muss der Vektor $\overrightarrow{CS}$ senkrecht auf der Geraden g stehen.

Da der Körper um die Gerade AB um 90° gedreht wird, entspricht der Punkt T dem Punkt C‘, der aus dem Punkt C nach der Drehung des Körpers übergeht.

Bedeutung von S:
S ist der Fußpunkt des Lots von C auf die Gerade AB.

Aufgabenstellung:
Der mit C bezeichnete Eckpunkt des Körpers wird nach der Drehung wird mit bezeichnet. Ermitteln Sie die Koordinaten von T.