



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Mathematik und Musik

verfasst von / submitted by

Jakob Faistauer

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 190 406 884

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik
Unterrichtsfach Informatik und Informatikmanagement

Betreut von / Supervisor:

Univ. Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, die mir mein Studium ermöglicht haben und mich immer in allen Bereichen unterstützt haben, wo es ihnen möglich war.

Meiner Partnerin gebührt mein tiefer Dank, da sie mir immer zur Seite gestanden ist, auch wenn ich einmal gestresst oder unmotiviert war.

Herzlichen Dank gebührt meinen Kolleginnen und Kollegen im BG-BRG-Maria-Trapp-Platz Expositur Simonsgasse, da sie mich immer unterstützt und ermutigt haben, mein Studium endlich fertig zu machen. Speziell möchte ich meinen Mathematikkolleginnen danken, da sie mich unterstützt haben, mit mir Unterrichtsstunden ausprobiert haben und mir immer mit Rat und Tat zur Seite gestanden sind.

Ich bin auch meinem Betreuer Herr Univ. Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger sehr dankbar, dass er mir dieses Thema ermöglicht und mich bei der Ausarbeitung gefordert hat.

Zu guter Letzt möchte ich noch allen meinen StudienkollegInnen auf diesem Weg danken, es war eine schöne Zeit.

Abstract

Diese Arbeit soll einen kleinen Einblick darüber geben, wie man verschiedene Aspekte der Musik verwenden kann, um SchülerInnen Mathematik näher zu bringen. Die angeführten Themen der Musik sind Schwingungen, Stimmungen, Intervalle, Takte und verschiedene Zahlenspielereien, wie zum Beispiel das Euler'sche Tonnetz, die Zwölftonmusik und die musikalischen Würfelspiele. Jedes Kapitel endet mit Aufgaben, welche die zuvor beschriebene Thematik betreffen.

Ebenso wurde eine dreistündige Unterrichtsreihe in zwei Klassen (6. Schulstufe) hintereinander durchgeführt, um zu sehen, wie gut sich die Thematik Addition und Subtraktion von Brüchen, mit Unterstützung der Notenwerte und Taktarten, im Unterricht erarbeiten und üben lässt. Dies beinhaltet: die Unterrichtsvorbereitung, Arbeitsblätter, Nachbereitung und Feedback der SchülerInnen und KollegInnen. Zu guter Letzt sind noch weitere Arbeitsmaterialien eingefügt samt einem Expertenfeedback von verschiedenen MathematikkollegInnen.

Im Zuge der Unterrichtsreihe wurde erhoben, dass sich die Musik gut dazu eignet, mathematische Inhalte zu erklären und zu üben.

English

This diploma thesis should provide a small insight into how to use different aspects of music to explain some mathematical phenomena to students. The musical topics, which are dealt with, are vibrations, tunes, intervals, beats and different number gimmicks, like for example Euler's tone-network, the twelve tone music as well as musical dice games. Each chapter ends with tasks regarding the topic that was previously dealt with.

Furthermore a teaching unit of 3 consecutive lessons was conducted in 2 classes (of the 6th grade). The intention was to analyse how well the topics addition and subtraction of fractions can be developed and trained with the help of note values and time signatures. Also contained are the lesson preparations, the worksheets and the feedback of the students and colleagues. Finally further training material is enclosed as well as the expert feedback of various mathematics teacher colleagues.

All in all, the teaching unit has shown that music is well-suited for explaining and training mathematical contents.

Inhalt

0	Einleitung	1
1	Musikalische Akustik, Schwingungen	2
1.1	Schwingung	2
1.2	Wie vernehmen wir Töne, Geräusche und Ähnliches?	5
1.3	Unterschied Ton – Klang – Geräusch – Knall	5
1.4	Harmonische und überlagerte Schwingungen	7
1.5	Schwebung	10
1.6	Aufgaben für den Unterricht	13
2	Intervalle/Stimmungen	18
2.1	Pythagoreische Stimmung (Geschichte)	18
	Übersicht des pythagoreischen Tonsystems	21
2.2	Reine / Diatonische Stimmung	23
	Übersicht des reinen / diatonischen Tonsystems	24
2.3	Mitteltönige Stimmung	26
2.4	Temperierte Stimmung	27
2.5	Vergleich der Stimmungen mit Hilfe der Cent-Skala	31
2.6	Die zwölf Töne der Oktave	33
2.7	Enharmonische Verwechslung	35
2.8	Dur- und Moll-Tonleiter	36
2.9	Aufgaben für den Unterricht	38
3	Rhythmus, Metrum, Takt	44
3.1	Takt	44
3.2	Taktarten	44
3.3	Notenwerte	45
3.4	Tempo	48
3.5	Aufgaben für den Unterricht	49
4	„Numerik“ (Zahlenspielerien)	50
4.1	Johann Sebastian Bach und die Zahl 14	50
4.2	Zwölftonmusik	52
4.3	Euler'sches Tonnetz / Euler'sche Schreibweise	56
4.4	Das musikalische Würfelspiel	58
	Mozarts Würfelwalzer	59
4.5	Aufgaben für den Unterricht	64

5	Evaluierung der Unterrichtsstunden	69
5.1	Rahmenbedingungen der Schule	69
5.2	Stundenplanung	71
	Erste Unterrichtseinheit:	71
	Zweite Unterrichtseinheit:	72
	Dritte Unterrichtseinheit:	73
5.3	Arbeitsblätter:	74
	Arbeitsblatt 1	74
	Arbeitsblatt 2	75
	Arbeitsblatt 3	76
5.4	Durchführung der Unterrichtseinheiten (2A)	77
	Unterrichtseinheit 1 (2A)	77
	Unterrichtseinheit 2 (2A)	78
	Unterrichtseinheit 3 (2A)	79
	Nachtrag Unterrichtseinheiten (2A)	81
5.5	Durchführung der Unterrichtseinheiten (2B)	82
	Unterrichtseinheit 1 (2B)	82
	Unterrichtseinheit 2 (2B)	83
	Unterrichtseinheit 3 (2B)	84
	Nachtrag Unterrichtseinheiten (2B)	84
5.6	Feedback der Unterrichtsreihe	84
	Feedback SchülerInnen (2A)	85
	Feedback SchülerInnen (2B)	85
	Feedback Kolleginnen	85
5.7	Weitere geplante Arbeitsblätter	86
	Arbeitsblätter Euler'sches Netz	87
	Arbeitsblätter Würfelwalzer	89
	Arbeitsblätter Rhythmus, Metrum, Takt	94
	Arbeitsblätter Schwingungen	97
	Arbeitsblätter Stimmungen	98
5.8	ExpertInnenfeedback	102
6	Fazit	104
	Literaturverzeichnis	105
	Abbildungsverzeichnis	108
	Tabellenverzeichnis	109
	Lebenslauf	110

0 Einleitung

„Mathematik ist Musik des Geistes, Musik ist Mathematik der Seele.“ – Daniil Charms

Die Frage, ob Musik und Mathematik zusammenhängen, beschäftigt die Menschheit schon eine lange Zeit. Pythagoras von Samos erkannte schon zirka 500 Jahre vor Christus, dass vieles in der Musik durch mathematische Strukturen erklärt werden kann. Im Laufe der Jahrhunderte gab es immer wieder Wissenschaftler und Musiker, die sich mit diesem Thema auseinandersetzten. Die folgende Arbeit setzt sich mit mehreren Personen und ihren Erkenntnissen auseinander, welche die Gemeinsamkeiten von Musik und Mathematik aufgezeigt haben.

Die Themen Schwingungen, Stimmungen, Intervalle, Takte und Komposition werden in weiterer Folge, sowohl musikalisch als auch mathematisch, erklärt. Am Ende jedes Kapitels wird ein kurzer Ausblick gegeben, wie diese Themen für mathematische Aufgaben verwendet werden können. Danach wird noch eine gehaltene Unterrichtsreihe vorgestellt und darüber berichtet, wie diese gelaufen ist. Abschließend sind noch einige Arbeitsblätter, samt Rückmeldung von verschiedenen Mathematiklehrkräften, angehängt.

Mit einer der Gründe, warum ich dieses Thema gewählt habe, ist, dass ich schon seit vielen Jahren selbst musiziere, sei es mit dem Waldhorn oder mit der Gitarre, bzw. später auch selbst in einem Chor sang. Ich habe immer Musik um mich gehabt und erkannte schon in meiner Jugend in der Musikschule, dass man sich vieles in der Musik mit der Mathematik gut erklären und herleiten kann, da alles sehr logisch und nach fixen Regeln aufgebaut ist. Durch meine Entscheidung, Mathematik und Informatik auf Lehramt zu studieren, wurde meine Beziehung zur Musik nicht weniger, allerdings hat mich die mathematische Seite der Musik noch mehr interessiert.

Ich unterrichte nun das dritte Jahr in einem Gymnasium in Wien und habe mich immer wieder gewundert, ob es funktionieren könnte, gewisse Themen der Mathematik über die musikalische Seite näher zu bringen. Zum einen, um den SchülerInnen zu zeigen, dass Mathematik nicht nur trocken und langweilig sein muss, sondern auch interessant sein kann und in unserer Welt fast allgegenwärtig ist. Ich habe immer wieder versucht auch andere Fächer in meinen Unterricht miteinfließen zu lassen. Im Speziellen die musikalische Seite hat sich dabei, vor allem in der Unterstufe bei Brüchen, als hilfreich herauskristallisiert.

1 Musikalische Akustik, Schwingungen

Ein Teilgebiet der Physik ist die Akustik. Sie beschäftigt sich mit der Ausbreitung von Longitudinalwellen in verschiedenen Medien (Gase, Festkörper und Flüssigkeiten). Am wichtigsten für uns Menschen ist die Ausbreitung von Wellen in der Luft, die als Schall wahrgenommen wird. Sie wird vom Trommelfell im Ohr aufgenommen und je nach Amplitude und Frequenzverlauf als Knall, Geräusch oder Ton erkannt. [1, S. 490]

1.1 Schwingung

Schwingung oder Oszillation kommt vom lateinischen *oscillare* und bedeutet schaukeln. [2]

„Als Schwingungen werden mehr oder weniger regelmäßig erfolgende zeitliche Schwankungen von Zustandsgrößen bezeichnet.“ [3, S. 1]

Mechanische Schwingungen

„Mechanische Schwingungen im Speziellen beschreiben Vorgänge, bei denen sich ein Körper regelmäßig um eine Gleichgewichtslage („Ruhelage“) bewegt.“ [4]

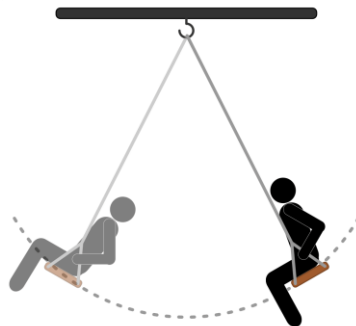


Abb. 1 Schaukeln als mechanische Schwingung [4]

Die Gesamtenergie wird in Lage- und Bewegungsenergie (E_{pot} und E_{kin}) aufgespalten. Die jeweiligen Energien verändern sich je nach Position und Geschwindigkeit des Pendels.

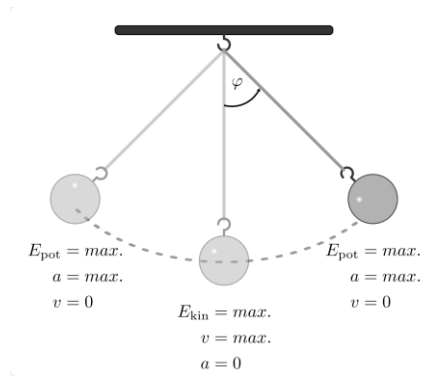


Abb. 2 Periodische Veränderung physikalischer Größen beim Pendel [4]

Amplitude, Schwingungsdauer, Frequenz und Elongation

Die Amplitude (r) beschreibt die maximale Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage. [5]

„Die Schwingungsdauer (T) ist die Zeit, nach der sich ein Bewegungsablauf in genau gleicher Weise wiederholt.“ [6]

Statt der Schwingungsdauer wird oft die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde angegeben, dies nennt man die Frequenz (f). [7]

„ $T = \frac{1}{f}$ “ Die Schwingungsdauer ist der Kehrwert der Frequenz

$f = \frac{1}{T}$ Die Frequenz ist der Kehrwert der Schwingungsdauer.“ [8, S. 103]

Unter Elongation versteht man die momentane Auslenkung des Körpers von der Ruhelage zum Zeitpunkt t , welche zum Beispiel durch die Funktion $f(t)$ dargestellt wird.

Sinusfunktion

Jede regelmäßige mechanische Schwingung kann mithilfe einer Sinusfunktion dargestellt werden und hat allgemein die Form:

$$f(t) = r \cdot \sin(b \cdot t + \varphi)$$

r = Amplitude, $\frac{b}{2\pi}$ = „Frequenz“ (bei $b = 1$ ist die Frequenz $\frac{1}{2\pi}$), t = Zeit in Sekunden, φ = Phasenverschiebung.

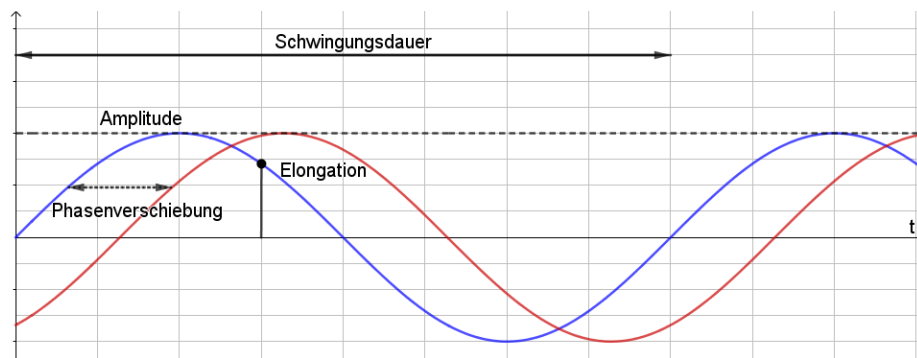


Abb. 3 Sinusfunktion (erstellt mit GeoGebra)

Die Höhe eines Tons wird durch die Schwingungsfrequenz bestimmt. Die Einheit der Tonhöhe ist *Hertz (Hz)* und gibt an, wie viele Schwingungen in einer Sekunde erzeugt werden. Die Lautstärke wird durch die Größe der Schwankung, also der Amplitude, definiert. Die Einheit der Lautstärke ist *Phon*, diese Einheit wird aber sehr selten verwendet. Meist spricht man von der physikalischen Größe *Dezibel (dB)*, welche aber dem Schallpegel entspricht und nicht der Lautstärke an sich. Der Zusammenhang zwischen Phon und Dezibel ist bei einer Frequenz von *1000 Hz* ersichtlich. In diesem Fall sind die beiden gleich groß. $1 \text{ Phon} = 1 \text{ dB}$ [9]

Um zum Beispiel den Ton *a* zu erzeugen, muss die Frequenz des Tones genau *220 Hz* (Hertz) betragen. Das bedeutet, dass sich die Schwingung insgesamt 220 Mal pro Sekunde wiederholen muss. Die Amplitude und die Phasenverschiebung sind momentan zu vernachlässigen. Es muss also nur die Gleichung $\frac{b}{2\pi} = 220$ gelöst werden, die restlichen Werte dürfen frei gewählt werden. In diesem Beispiel ist die Amplitude $a = 6$, die Phasenverschiebung $\varphi = 0$ und $b = 2 \cdot 220 \cdot \pi$.

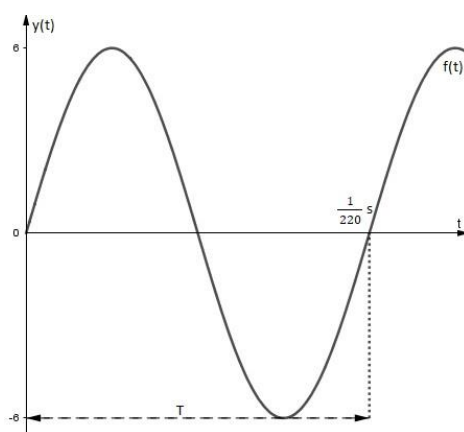


Abb. 4 Sinuswelle eines *a* (mit 220 Hz) (erstellt mit GeoGebra)

1.2 Wie vernehmen wir Töne, Geräusche und Ähnliches?

Damit ein Mensch einen Ton oder ein Geräusch vernimmt, bedarf es einiger Voraussetzungen. Als erstes benötigt man eine Tonquelle, dies kann ein Mensch sein, der mit Luft seine Stimmbänder in Schwingung bringt, eine Saite einer Gitarre, die angeschlagen wird, oder eine Membrane eines Lautsprechers, die sich bewegt. All diese Quellen bringen dabei die Luft zum Vibrieren und erzeugen somit eine Schallwelle. Dieser Schall wird durch ein Medium, meist die Luft, zum menschlichen Ohr transportiert und dort im Mittelohr und Innenohr entgegengenommen, umgewandelt und im Gehirn als Töne wahrgenommen. [10], [11]

Dies ist allerdings nur eine Möglichkeit, einen Ton zu vernehmen, denn auch feste Körper können Schall aufnehmen und weitergeben. Das beste Beispiel dafür ist ein Nachbar, dem am Sonntagmorgen einfällt, er wolle ein Regal montieren, und dafür mehrere Löcher in die gemeinsame Wand bohrt oder einen Nagel einschlagen will. Diesen Körperschall können wir erst dann hören, wenn er wieder in Luftschall umgewandelt wird. Die Vibrationen kann man aber sehr wohl spüren, wenn man zum Beispiel die Wand berührt oder barfuß am Boden steht. Umgekehrt können wir Luftschall nicht immer spüren, erst wenn er eine sehr niedrige Schallfrequenz erreicht hat, kann er beim Treffen auf den menschlichen Körper einen Körperschall erzeugen. Spürbar ist das, wenn man vor einem Subwoofer steht, bzw. auf einem Heavy-Metall oder Rock-Konzert ist. [11]

Ludwig van Beethoven (*1770 – †1827) war ein Komponist, welcher zu Lebzeiten zunehmend schwerhörig wurde. Trotz dieser Einschränkung komponierte er weiterhin Stücke. Um seine Stücke auch weiterhin „hören“ zu können, ließ er sie sich vorspielen. Während des Spielens legte er das Ende seines Taktstocks auf das Klavier, das andere Ende nahm er zwischen die Zähne. Durch diesen Trick konnte er die Schallwellen des Klaviers in Körperschall über den Taktstock, seine Zähne und seinen Kiefer bis in seinen Schädelknochen weiterleiten. Dort wurden sie im Innenohr wieder in Luftschall umgewandelt und er konnte seine Komposition hören. [11]

1.3 Unterschied Ton – Klang – Geräusch – Knall

Wir können Hörbares in zwei Kategorien unterteilen. Jene, die eine periodische Schwingung haben, und solche, die dies nicht haben. In die erste Kategorie gehören der Ton und der Klang, in letztere gehören Geräusch und Knall.

Reine Töne definieren sich durch einzelne Sinusschwingungen. Ein Beispiel dafür ist der Kamerton a' . Sie können nur mathematisch, mit Hilfe einer Sinusfunktion, konstruiert werden. Es gibt ein paar Instrumente, welche einen obertonarmen Klang erzeugen können, dies sind Stimmgabeln

oder gedackte Orgelpfeifen. Sie nähern sich dem reinen Sinuston nur an, sind aber keine reinen Töne, da es diesen es in der Natur nicht gibt. [12]

Die viel häufiger vorkommenden „natürlichen Töne“ sind eigentlich schon Klänge. Sie bestehen aus einer Summe von Sinustönen, die sich überlagern. Das Verhältnis der Frequenzen steht meist im ganzzahligen Verhältnis zueinander. Diese Klänge sind Überlagerungsschwingungen, die im Allgemeinen keine Sinusschwingungen, aber trotzdem in ihrer Grundfrequenz periodisch sind. Die Klangfarbe wird durch die Partialtöne, die naturbedingt auftreten, bestimmt.[13, S. 17], [14, S. 488f]

In die zweite Kategorie gehören Geräusch und Knall. Unter einem Geräusch versteht man eine in der Regel aperiodische, sich zeitlich ändernde Struktur. Hier gibt es eine weitere Unterteilung in drei grobe Felder: Grundtöne, Signallaute und Orientierungslaute. Zu den Grundtönen gehören Geräusche, die aus der Tierwelt, der Landschaft, der Umwelt oder dem Wetter stammen. An diese gewöhnt man sich relativ schnell und diese werden vom Gehirn danach ausgeblendet. Unter Signallauten versteht man klare Geräusche, welche zur Übermittlung von Botschaften verwendet werden, Beispiele dafür sind Glocken, Sirenen oder Jagdhornklänge. Orientierungslaute sind charakteristische Geräusche, welche zwar keine direkte Botschaft vermitteln, aber vom Menschen identifizierbar und beachtenswert sind, zum Beispiel das Geklimper eines Klaviers oder das anschwellende Geräusch eines Fahrzeuges. [15]

In die letzte Unterkategorie fällt der Knall. Er ist ähnlich wie das Geräusch, unterscheidet sich aber durch seine kurze Dauer. Ein Knall wird durch eine stoßartige und plötzliche Dichteveränderung der Luft erzeugt. Dies geschieht zum Beispiel bei einem Peitschenschlag oder einer Explosion. Charakteristisch ist neben der kurzen Zeitdauer das schnelle Abklingen der Amplitude. Eine Knallwelle kann durch den schnellen Anstieg des Drucks sogar Überschallgeschwindigkeiten von bis zu 1000 m/s erreichen. [16]

Im folgenden Bild sind die charakteristischen Wellen der vier Kategorien dargestellt. Jede ist für sich selbst sprechend und spiegelt die Eigenschaften der einzelnen Schallerzeugnisse klar wider.

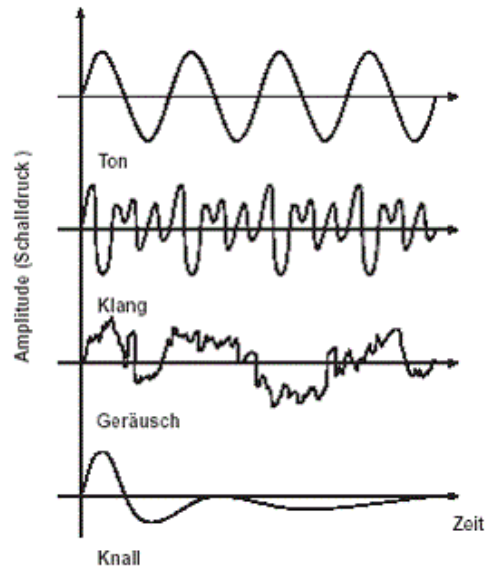


Abb. 5 Ton – Klang – Geräusch – Knall [17]

1.4 Harmonische und überlagerte Schwingungen

Um das Phänomen des Klanges komplett zu erfassen, bedarf es einer genaueren Auseinandersetzung mit den Begriffen der harmonischen und überlagerten Schwingungen, welche gemeinsam einen Klang erzeugen. Eine Schwingung wird erst dann als harmonische Schwingung erkannt, wenn auch Obertöne mitschwingen. Unter Obertönen versteht man die zum Grundton mitklingenden Bestandteile, welche bei jedem Instrument oder Vokal auf natürliche Weise miterzeugt werden. Der Grundton ist hier meist der tiefste Teilton der Schwingung, dieser wird auch als Tonhöhe wahrgenommen. Die Obertöne tragen vor allem zur Klangfarbe bei, denn ohne sie würde der Ton steril klingen. [18]

Die Frequenz der Obertöne ist immer ein ganzzahliges Vielfaches von der Frequenz des Grundtones. Das heißt, wenn der Grundton der Kammerton a' mit seinen 440 Hz ist, dann sind die Obertonfrequenzen zum Beispiel 880 Hz oder gar 2200 Hz , aber niemals 666 Hz , denn das wäre dann eine unharmonische Schwingung. Die Funktion einer harmonischen Schwingung besteht aus sich überlagernden Sinuswellen. [18], [19, S. 114f]

In der folgenden Abbildung sieht man den Grundton (cyan), den ersten Oberton (grün), den zweiten Oberton (rot), den dritten Oberton (violett). Die Summe all dieser Sinusschwingungen ergibt die Harmonische Schwingung (schwarz).

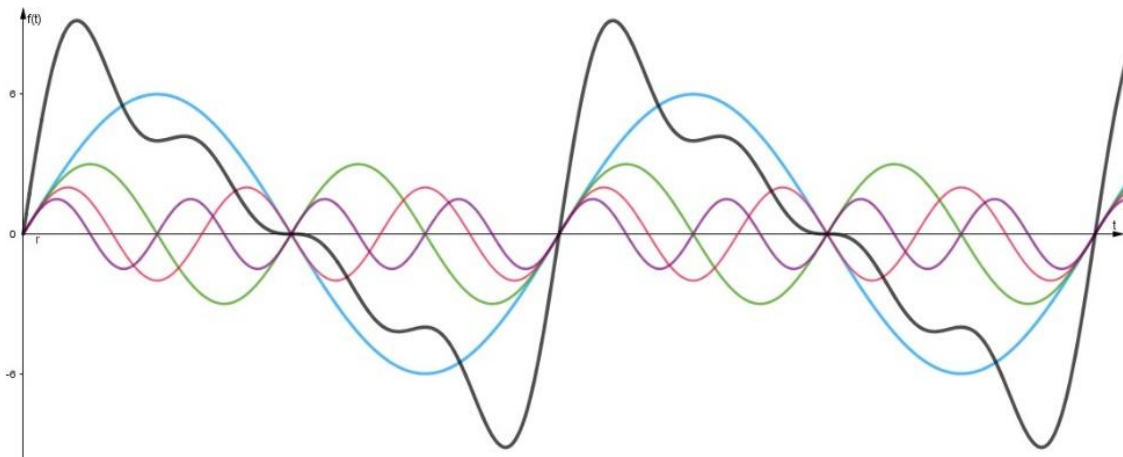


Abb. 6 Harmonische Schwingung (erstellt mit GeoGebra)

Es klingen nicht alle Klänge gleich, auch wenn sie denselben Grundton haben. Das liegt daran, dass die Obertöne immer verschieden stark mitschwingen. Bei dem Beispiel in Abb. 6 sind die Obertöne immer schwächer geworden. Dem ist aber nicht immer so. deshalb klingt auch zum Beispiel das a' auf einem Klavier anders als auf einem Waldhorn.

Eine harmonische Reihe besteht aus Obertönen, welche auf einem Grundton basieren und gemeinsam mit dem Grundton eine harmonische Schwingung erzeugt. Diese Reihe wurde schon in der Antike entdeckt. Man nahm an, dass, wenn man eine Saite in der Hälfte teilt, eine doppelte Schwingungszahl erreicht wird, wenn die Saite bei einem Drittel geteilt wird, eine dreifache Schwingungszahl erreicht wird, und so weiter. In der Praxis der Musik kommt dies bei Saiteninstrumenten mit Flageolettönen oder bei Blasinstrumenten beim Überblasen vor. [20, S. 641f]

In der nächsten Abbildung sind die harmonischen Teilschwingungen idealer Saiten eingezeichnet. Die vollen bunten Punkte sind die Stellen, an denen man die Saite auch abtrennen könnte, bzw. an denen man die Flageolettöne spielen kann. Im unteren Teil der Abbildung sind alle einzelnen Verhältnisse aufgelistet.

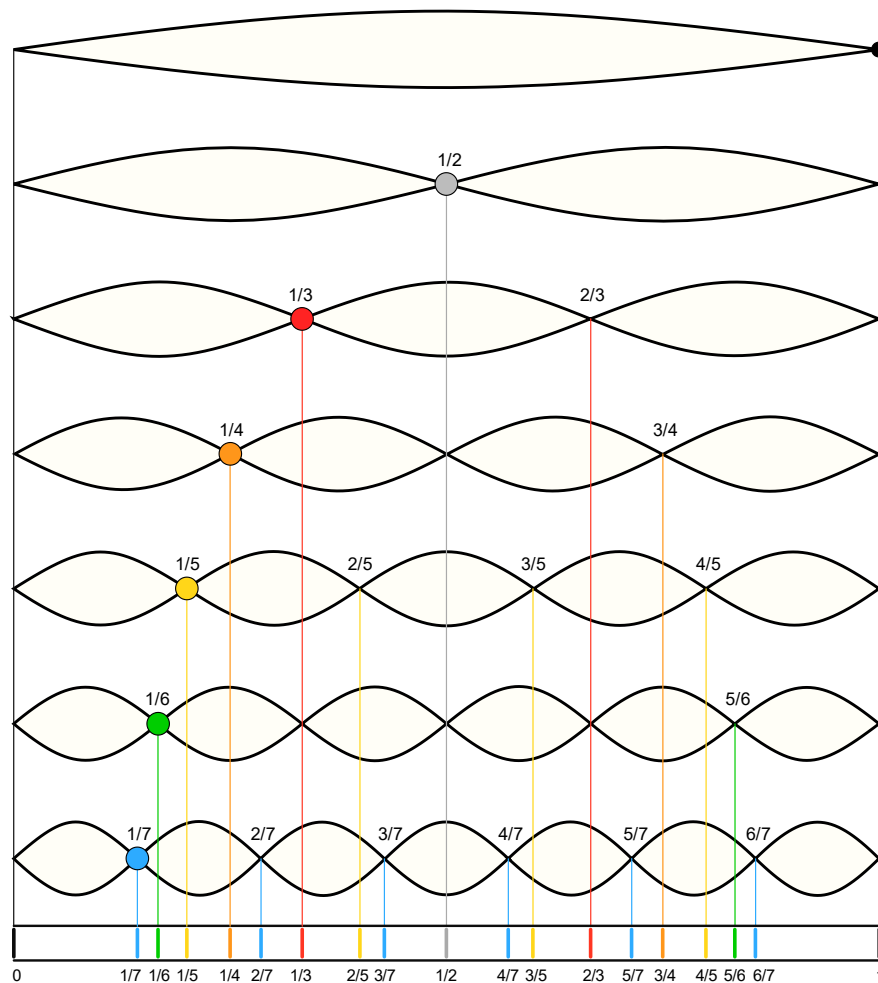


Abb. 7 Harmonische Teilschwingungen von idealen Saiten [18]

Die einzelnen Obertöne der harmonischen Schwingung mit dem Grundton des großen C ($\cong 66 \text{ Hz}$) kann man auch sehr schön auf einem Notenblatt festhalten, allerdings braucht man sowohl einen Bass- als auch einen Violinschlüssel dafür. In diesem Notenbeispiel werden die Unterschiede zwischen den Obertönen mit den gleichgeschriebenen Tönen der temperierten Stimmung verglichen und in Cent (siehe Kapitel 2.5) angegeben.

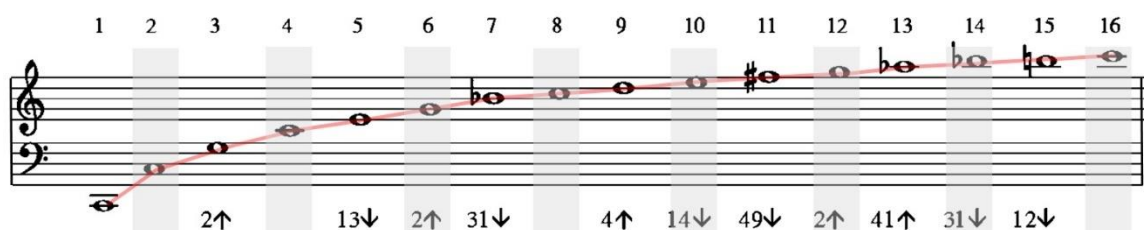


Abb. 8 Harmonische Obertonreihe. Vergleich zur temperierten Stimmung (Unterschied in Cent) [18]

Aus dieser Notenzeile geht hervor, dass die Intervalle zwischen den ersten paar Tönen zwar recht groß sind, sie allerdings relativ schnell immer kleiner werden. Dies hat damit zu tun, dass die Tonhöhe dieser Obertonreihe logarithmisch steigt. Deshalb ist der vierte Ton der Reihe auch zwei Oktaven, der achte Ton drei Oktaven und der sechzehnte Ton sogar vier Oktaven höher. Wenn man sich den $\log_2(x)$ ansieht, erkennt man auch den Zusammenhang.

	$\log_2(1) = 0$	$\log_2(2) = 1$	$\log_2(4) = 2$	$\log_2(8) = 3$	$\log_2(16) = 4$
Unterschied	0 Oktaven	1 Oktave	2 Oktaven	3 Oktaven	4 Oktaven

Tab. 1 Zusammenhang $\log_2(x)$ und Oktavenabstände bei harmonischen Obertonreihen

1.5 Schwebung

Unter Schwebung versteht man den Effekt, welcher entsteht, wenn die Überlagerung zweier Schwingungen, deren Frequenzen sich nur leicht voneinander unterscheidet, zu einer periodischen ab- und zunehmenden Amplitude führt. [21, S. 142ff]

In folgendem Beispiel sind zwei Schwingungen, die sich in der Frequenz um 10% unterscheiden, dargestellt. Die erste Abbildung zeigt die beiden einzelnen Schwingungen (grün und blau). In der zweiten Abbildung ist die Überlagerung der beiden Schwingungen veranschaulicht, welche mathematisch die Addition der beiden ist. Außerdem ist noch die einhüllende Schwingung als punktierte Sinusfunktion angedeutet (einmal oben und einmal unten).

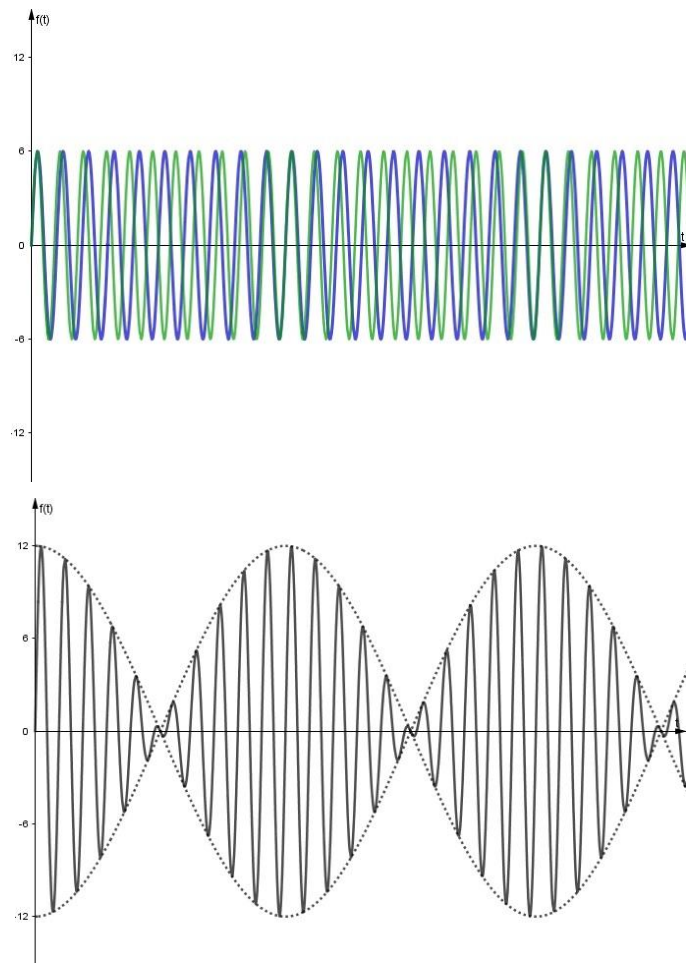


Abb. 9 Schwebung von zwei Frequenzen (erstellt in GeoGebra)

In der Abbildung ist zu erkennen, dass auch eine Schwebung eine andere Frequenz hat, welche man natürlich auch ausrechnen kann. Wenn man für die erste Schwingung eine Frequenz von $f_1 = 220 \text{ Hz}$ annimmt, sollte die zweite Frequenz in diesem Beispiel, da sie um 10% erhöht ist, $f_2 = 242 \text{ Hz}$ betragen. Die Amplitude ($a_1 = a_2$) der beiden Frequenzen ist in diesem Beispiel gleich. Da die resultierende Summenschwingung (Index R) eine Summe aus den beiden Schwingungen ist, kann sie wie folgt dargestellt werden: [22]

$$y_R = a_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) + a_2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)$$

$$y_R = (a_1 + a_2) \cdot (\sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) + \sin(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t))$$

Durch die Anwendung der trigonometrischen Additionstheoreme kann der Ausdruck wie folgt geschrieben werden: [22]

$$y_R = (a_1 + a_2) \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) \cdot t\right) \cdot \cos\left(2\pi \cdot \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) \cdot t\right)$$

Daraus folgt, dass die Frequenz der Überlagerungsschwingung das arithmetische Mittel der beiden Frequenzen ist: [22]

$$f_R = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Die Schwebungsfrequenz hingegen ergibt sich durch den halben Betrag der Differenz der beiden ursprünglichen Frequenzen: [22]

$$f_S = \frac{|f_1 - f_2|}{2}$$

Durch diese Information lässt sich nun eine Funktion aufstellen, mit der die Schwebungsfunktion direkt gezeichnet werden kann: [22]

$$y_R = (a_1 + a_2) \cdot \sin(2\pi \cdot f_R \cdot t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_S \cdot t)$$

1.6 Aufgaben für den Unterricht

Die folgenden Aufgaben werden genauer behandelt, indem jeweils die Lösung präsentiert wird, mögliche auftretende Probleme analysiert werden und die Voraussetzungen diskutiert werden.

Aufgabe 1: Harmonische und überlagerte Schwingungen

Erstelle mit Hilfe von GeoGebra eine harmonische Schwingung, wenn der Grundton A' eine Frequenz von 55 Hz hat. Es sollten die ersten 4 Obertöne mitschwingen, jeder mit einem Vielfachen h (wobei $h \in [0,25; 0,90]$) der Original-Amplitude.

(Hinweis: Stelle vorher die x -Achse in GeoGebra auf eine passende Größe, sonst hängt sich das Programm eventuell auf.)

- Welche Frequenzen haben die ersten vier Obertöne?
- Wie schaut deine Frequenz in GeoGebra aus?
- Wie würden die ersten 15 Obertöne aussehen?
- Versuche, die einzelnen Frequenzen „echten“ Tönen zu zuordnen (möglichst nahe Töne).
- Recherchiere: Welche Töne sind Oktavtöne? Womit könnte dies zusammenhängen? Kann man im Vorhinein sagen, welche Töne Oktavtöne sein werden?

Lösung Aufgabe 1

- Die Frequenz der Obertöne erhält man, indem man die Grundtonfrequenz mit einem ganzzahligen Vielfachen multipliziert. In dieser Aufgabe sind sie 110 Hz, 165 Hz, 220 Hz und 275 Hz.
- Eine Lösung in GeoGebra mit der Grundschiwingung (grün), die Obertöne wurden mit einem Schieberegler versehen, damit man die Veränderung der unterschiedlichen Amplituden besser sehen kann. Die strichlierte Linie ist die gesamte Schwingung.

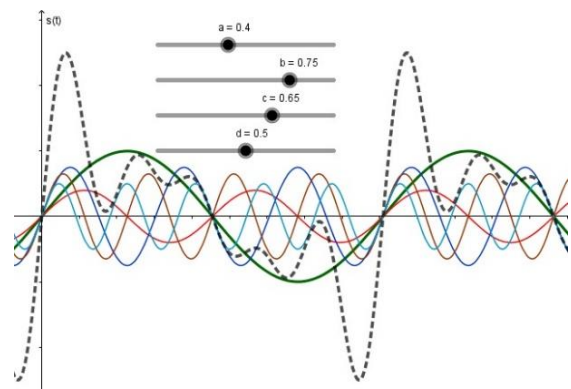


Abb. 10 Lösung Aufgabe 1 (erstellt in GeoGebra)

- Die ersten 15 Obertöne sind nach dem gleichen Schema, wie in a), zu berechnen. 110 Hz, 165 Hz, 220 Hz, 275 Hz, 330 Hz, 385 Hz, 440 Hz, 495 Hz, 550 Hz, 605 Hz, 660 Hz, 715 Hz, 770 Hz, 825 Hz, 880 Hz.

- d) Die berechneten Frequenzen einem Ton zuordnen ist bei den ersten 6-8 Tönen noch recht einfach, danach fällt man immer öfter zwischen zwei Tonfrequenzen, da die absoluten Abstände zwischen den einzelnen Tönen immer größer wird.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
110	165	220	275	330	385	440	495	550	605	660	715	770	825	880
<i>A</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>cis'</i>	<i>e'</i>	<i>g'</i>	<i>a'</i>	<i>h'</i>	<i>cis''</i>	<i>d''</i>	<i>e''</i>	<i>f''</i>	<i>g''</i>	<i>gis''</i>	<i>a''</i>

Tab. 2 Lösung Aufgabe 1

- e) Aus der Aufgabe d) kann man ablesen, welche Töne in dieser Reihe die Oktavtöne sind (1., 3., 7., 15.). Wenn man sich im Hinterkopf behält, dass die Frequenzen der Töne exponentiell steigen, kann man über den Logarithmus herausfinden, welche Töne Oktavtöne sein werden.

Wenn man vom Grundton ausgeht und diesen als 1 nummeriert, den ersten Oberton mit 2, usw. kann man mit dem Logarithmus zur Basis 2 (da ein Oktavsprung eine Frequenzverdoppelung ist) folgende Tabelle herleiten:

	$\log_2(1) = 0$	$\log_2(2) = 1$	$\log_2(4) = 2$	$\log_2(8) = 3$	$\log_2(16) = 4$
Unterschied	0 Oktaven	1 Oktave	2 Oktaven	3 Oktaven	4 Oktaven

Tab. 3 Zusammenhang $\log_2(x)$ und Oktavenabstände bei harmonischen Obertonreihen

Da wir hier den Grundton mit 1 nummeriert haben und nicht den 1. Oberton, müssen wir von unserem x wieder eins abziehen, um die richtigen Obertöne zu finden. Somit weiß man, dass der 1. Oberton, der 3. Oberton, der 7. Oberton und der 15. Oberton zu den Oktavtönen gehören muss.

Durchführung Aufgabe 1

Für diese Aufgabe sollten die SchülerInnen Zugang zum Programm GeoGebra haben, ob dies auf den eigenen Laptops stattfindet oder in einem Computersaal ist jedem selbst überlassen. Falls dies nicht möglich ist, kann auch Aufgabe b) ausgelassen werden. Für den Rest benötigt man nur ein internetfähiges Mobiltelefon oder die Lösung kann gemeinsam besprochen werden. Die SchülerInnen sollten auf jeden Fall Vorkenntnisse mit Schwingungen haben und den Zusammenhang zwischen der allgemeinen Sinusschwingung und einer Tonfrequenz kennen.

Probleme Aufgabe 1

Zu Problemen kann es kommen, wenn sich die SchülerInnen nicht sehr gut mit GeoGebra auskennen, z. B.: die x -Achse zu weit gelassen wird, was zum Absturz des Programmes führen kann.

Des Weiteren könnten die SchülerInnen Probleme haben, den Zusammenhang zwischen den Logarithmus und den Oktavtönen zu verstehen, wenn sie die Nummerierung der Obertöne nicht gut gewählt haben (in der Lösung absichtlich nicht perfekt gewählt).

Warum Aufgabe 1?

Diese Aufgabe soll die SchülerInnen fordern, indem sie sich Gedanken über die Zusammenhänge, die zwischen diesen zwei Themen herrschen, machen. In der Schule ist dieses Beispiel erst in der 6. Klasse (10. Schulstufe) geeignet, da erst hier die Logarithmen und Winkelfunktionen im Lehrplan stehen. Das Beispiel eignet sich für einen fächerübergreifenden Unterricht mit dem Fach Musik und natürlich mit Physik, wobei auch hier im gleichen Semester die Schwingungen im Lehrplan stehen [23].

Aufgabe 2: Schwebung 1

Die Frequenz der Überlagerungsschwingung wird, wie folgt, berechnet: $f_R = \frac{f_1 + f_2}{2}$

Die einhüllende Frequenz hingegen ist eine Subtraktion: $f_S = \frac{|f_1 - f_2|}{2}$

Unter Schwebung versteht man den Effekt, welcher entsteht, wenn die Überlagerung zweier Schwingungen, deren Frequenzen sich nur leicht voneinander unterscheidet, zu einer periodischen ab- und zunehmenden Amplitude führt. [21, S. 155ff]

- Erkläre mit eigenen Worten, was eine Schwebung ist, bzw. wie man sie erkennen/hören kann.
- Wo können Schwebungen vorkommen?
- Berechne die Frequenz der Schwebung zwischen den Frequenzen 261,6 Hz (temperiertes c') und 264 Hz (reines c').
Erkläre wieso das c' zwei verschiedene Frequenzen haben kann.

Lösung Aufgabe 2

- (individuelle Antworten)
z.B.: Wenn zwei Töne sehr nah aneinander liegen, kommt es zu einer „Reibung“ der Töne, und diese hört man dann wie einhüllende Schwingung.
- Wenn zwei Instrumente nicht genau abgestimmt sind oder zwei Orchestren nicht auf den gleichen Grundton gestimmt sind.

- c) In die beiden Formeln f_R und f_S in der Angabe einsetzen.

Frequenz der Überlagerungsschwingung = 262,8 Hz.

Einhüllende Frequenz = 1,2 Hz

Weil es sich bei diesen beiden c' um zwei verschiedene Stimmungen handelt. Es kommt immer drauf an, wie die Intervallschritte zwischen den Tönen definiert sind.

Durchführung Aufgabe 2

Je nachdem wie gut sich die SchülerInnen mit dem Thema schon befasst haben, brauchen sie für die Aufgabe eine Möglichkeit im Internet zu recherchieren oder nicht. Die Zusatzinformation am Anfang der Aufgabe kann man die Lernenden zum Beispiel selbst herausfinden lassen, wenn man dies vorhat, sollte aber eine Veranschaulichung mit einem Programm wie GeoGebra möglich sein, da man dann die Unterschiede besser erkennen kann. Auch bei einer Internetrecherche kann man danach die SchülerInnen gemeinsam herausfinden lassen, warum genau diese beiden Formeln dafür verwendet werden.

Probleme Aufgabe 2

Bei den ersten beiden Aufgaben kann es zu sehr guten Antworten kommen, oder die SchülerInnen schreiben einfach die Aufgabe ab, da es dort schon recht gut erklärt ist, was mit weniger Information und mehr Recherche aber gut abänderbar ist. Für Aufgabe c) wiederum braucht man, wenn man die Zusatzinformation weglässt, entweder kreative Köpfe oder Internetrecherche.

Warum Aufgabe 2?

Ähnlich wie Aufgabe 1 fordert auch diese Aufgabe die SchülerInnen dazu auf, selbst Zusammenhänge herauszufinden und lässt sich wunderbar mit den Schulfächern Musik und Physik verbinden, in denen auch das Phänomen der Schwebung sehr gut zeigen lässt.

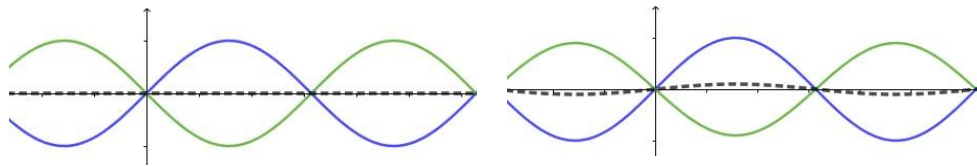
Aufgabe 3: Auslöschung

Eine Auslöschung ist eine spezielle Art von Schwingungsüberlagerung.

- Finde heraus, worum es sich hierbei handelt.
- Erkläre in eigenen Worten, wie dies zustande kommt.
- Wo wird diese Technik verwendet?
- Gib ein Beispiel mit zwei Sinusfunktionen an, wo eine perfekte und eine nahezu perfekte Auslöschung stattfindet.

Lösung Aufgabe 3

- a) Bei einer Auslöschung handelt es sich um eine Art der Schwebung, nur dass hier eine Phasenverschiebung um 180° oder π der Sinusfunktion hinzukommt.
- b) Zustande kommt dies am einfachsten durch eine Negierung (Multiplikation des Terms mit (-1)) der eigentlichen Schwingung. Durch eine Addition der Originalschwingung und der verschobenen oder negierten löschen sie einander aus.
- c) In der Technik wird dies Phänomen als „Noise Cancelling“ bezeichnet und wird verwendet, um die Umgebungsgeräusche bei Kopfhörern oder Flugzeugen „auszublenden“.



Das erste ist eine perfekte Auslöschung, das zweite eine nahezu perfekte Auslöschung

Durchführung Aufgabe 3

Wie bei Aufgabe 2 kommt es hier auch auf die Vorkenntnisse der SchülerInnen an, aber wahrscheinlich werden sie eine Möglichkeit brauchen, um eine Internetrecherche durchzuführen. Für Aufgabe d) reicht an sich auch ein grafischer Taschenrechner, aber mit GeoGebra lässt es sich wie immer viel besser darstellen, bzw. können auch verschieden starke Auslöschungen dargestellt werden (Schiebereglern). Bei der Aufgabe c) werden die meisten schon mal etwas davon gehört haben, bzw. vielleicht selbst solche Kopfhörer besitzen. Eine Erweiterung wäre es, dies auch in anderen Bereichen anzuwenden, wie zum Beispiel Wasser, Licht, etc.

Probleme Aufgabe 3

Wenn die davor Aufgabe 2 gemacht wurde, sollte diese Aufgabe an sich keine großen Probleme darstellen.

Warum Aufgabe 3?

Ähnlich wie Aufgabe 1 und 2 fordert auch diese Aufgabe die SchülerInnen dazu auf, selbst Zusammenhänge herauszufinden und lässt sich wunderbar mit dem Schulfach Physik verbinden, indem man zum Beispiel „Noise Cancelling“ Experimente macht, bzw. auch an dort bespricht, warum dies in manchen Bereichen noch nicht gemacht wird.

2 Intervalle/Stimmungen

2.1 Pythagoreische Stimmung (Geschichte)

Pythagoras von Samos (*570 – †510 v.Chr.), ursprünglich auf der Insel Samos (Griechenland) geboren, zog nach Milet und wurde dort Schüler des Thales von Milet (636 bis 546 v.Chr.). Später unternahm er ausgedehnte Reisen in den Orient, wo er die ägyptische, babylonische und auch die indische Mathematik kennenlernte. Außerdem wurde er mit der chinesischen Harmonik vertraut. Er gilt als der Entdecker der westlichen musikalischen Tonleiter.

Er hatte auch besonderes Interesse an der Beziehung von Musik und Rhythmus. Die Harmonielehre und die Mathematik in einem Rhythmus faszinierten ihn besonders. [24]

Einer Legende zufolge ging Pythagoras eines Tages an einer Schmiede vorbei und hörte die Hämmer beim Aufschlagen auf den Amboss verschiedene Töne erklingen lassen. Er erkannte, dass unterschiedlich große Hämmer verschiedene Tonhöhen hervorriefen und den Zusammenhang zwischen den Tonhöhen und den Gewichten der Hämmer. Er erkannte, dass die um eine Oktave höher klingende Ton durch einen doppelt so schweren Hammer auf dem gleichen Amboss erzeugt wurde.

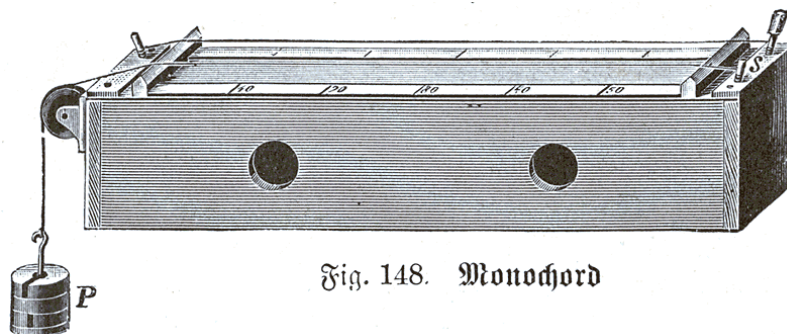


Abb. 11 Monochord [25, S. 153]

Zuhause führte er seine Untersuchungen fort, indem er auf dem Monochord (ein längliches Holzkästchen mit einer einzelnen Saite) spielte. Er setzte einen Steg an verschiedene Stellen unter der Saite, dann ergaben sich unterschiedliche Töne. Dabei erkannte er, dass der um eine Oktave höhere Ton mit der doppelten Frequenz als der Grundton schwingt. Wenn er den Steg genau in der Mitte ansetzte, erklang jede Hälfte mit einem harmonischen Oberton zum originalen Ton, der sogenannten Oktave. Beim Teilungsverhältnis drei zu zwei erklang die reine Quinte. Danach brachte er die Saite im Verhältnis vier zu drei zum Schwingen und erhielt eine Quart.

Pythagoras war der Überzeugung, dass der Musik die Mathematik zu Grunde liegt. Das System der Tonzahlen, welches aus dem Verhältnis zweier natürlicher Zahlen besteht, wurde für Pythagoras das Symbol für die göttliche Grundstruktur allen Seins. [26]

„Im Allgemeinen entspricht dem Nacheinanderausführen zweier Tonschritte das Multiplizieren der entsprechenden Verhältniszahlen.“ [27, S. 49]

Das Hintereinanderausführen zweier Tonsprünge T_1 und T_2 ist ein gewisser Tonsprung T_{gesamt} . Insofern liegt es sprachlich nahe von einer „Addition einzelner Tonsprünge zu einem Gesamttonsprung“ zu sprechen (im Sinne des Hintereinanderausführens). Da aber das Durchführen von Tonsprüngen, was die zugehörigen Frequenzen betrifft, eigentlich ein multiplikativer Vorgang ist, d. h. die zugehörigen Frequenzen werden mit gewissen Zahlen multipliziert, steckt mathematisch dahinter eigentlich eine Multiplikation. Analog kann man sprachlich einerseits „Subtraktionen“ bei Intervallen betonen, wobei dahinter mathematisch aber eine Division steckt.

Als Beispiel nehmen wir die Quinte und die Quart.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Quinte} & + & \text{Quart} & = & \text{Oktave} \\ \frac{3}{2} & \cdot & \frac{4}{3} & = & \frac{2}{1} \end{array}$$

Durch eine Division kann wiederum das Verhältnis zwischen zwei Intervallen, die vom gleichen Grundton ausgehen, festgestellt werden.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Quinte} & - & \text{Quart} & = & \text{Ganzer Ton} \\ \frac{3}{2} & : & \frac{4}{3} & = & \frac{9}{8} \end{array}$$

Von nun an werden die Intervalle zweier Töne nicht mehr durch das Saitenlängenverhältnis, sondern durch das Verhältnis der Schwingungszahlen, also den Kehrwert, angegeben.

„Ist l die Länge der schwingenden Saite und f deren Frequenz, so gilt $l = \frac{k}{f}$ mit geeignet gewähltem Proportionsfaktor k . Am Monochord ist die Länge des schwingenden Saitenabschnittes bei konstanter Saitenspannung umgekehrt proportional zur Frequenz. Auf Grund dieser physikalischen Sachverhalte kann damit festgestellt werden: Zwei Tonintervalle sind genau dann gleich, wenn ihre Frequenzen im gleichen Verhältnis zueinanderstehen.“ [27, S. 50].

Um die Veranschaulichung zu gewährleisten, werden wir die folgenden Intervalle anhand einer C-Dur-Tonleiter ($c - d - e - f - g - a - h - c'$) angeben.

Mit Hilfe des Monochords ist es möglich, folgende Verhältniszahlen zum Grundton c zu beschreiben:

Tonbezeichnung	c	f	g	c'
Verhältniszahl	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$
Intervall	Prim	Quart	Quinte	Oktave

Tab. 4 Tonverhältnisse pythagoreische Stimmung

Zur vollständigen C-Dur-Tonleiter fehlen noch vier weitere Töne. Die pythagoreische Tonleiter beinhaltet zwei kleine und fünf große Tonschritte. Die großen Tonschritte ergeben sich durch folgende Überlegung:

Seien $q_1 = \frac{3}{2}$ und $q_2 = \frac{4}{3}$, dann gilt für den großen Tonschritt $q = \frac{q_1}{q_2} = \frac{9}{8}$. Die Schrittweite entspricht dem Verhältnis von f und g , des Weiteren auch von c und d , von d nach e , von g nach a sowie von a nach h . Es fehlen nur noch die Schwingungszahlen, die die Schritte von e nach f und von h nach c' darstellen. [28, S. 6f]

Von c nach f ist das Intervall eine Quart mit dem Verhältnis $\frac{4}{3}$. Zwischen c und e befinden sich zwei Ganztonschritte diese haben das Verhältnis $\frac{9}{8} : \frac{9}{8} = \frac{81}{64}$. Um jetzt auf die Schwingungszahlen zwischen e und f zu kommen, muss man den Bruch finden mit dem man $\frac{81}{64}$ multiplizieren muss um auf das Verhältnis $\frac{4}{3}$ zu kommen. Dies kann durch folgende Gleichung darstellen:

$$\frac{81}{64} : v = \frac{4}{3}$$

Durch diese Rechenmethode ergibt sich folgendes Zahlenverhältnis $\frac{256}{243}$.

Der Bruch mit seinem dreistelligen Zähler und Nenner fällt nicht nur mathematisch aus dem Rahmen, sondern auch in akustischer Hinsicht bilden die Töne keine gute Harmonie.

Folgende Übersicht kann, anhand der oben genannten Überlegung, bezogen auf den Grundton c erstellt werden. [28, S. 6f]

Übersicht des pythagoreischen Tonsystems

Tonbezeichnung	c	d	e	f	g	a	h	c'
Schwingungszahl bezogen auf c	$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{2}{1}$
bezogen auf tieferen Nachbarton		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

Tab. 5 Übersicht des pythagoreischen Tonsystems[28, S. 7]

Durch den gemeinsamen Nenner 384 kann die fortlaufende Proportion ganzzahlig dargestellt werden:

$$384 : 432 : 486 : 512 : 576 : 648 : 729 : 768$$

Auf kleinere Verhältniszahlen kann die Tonleiter nicht reduziert werden. [28, S. 6f]

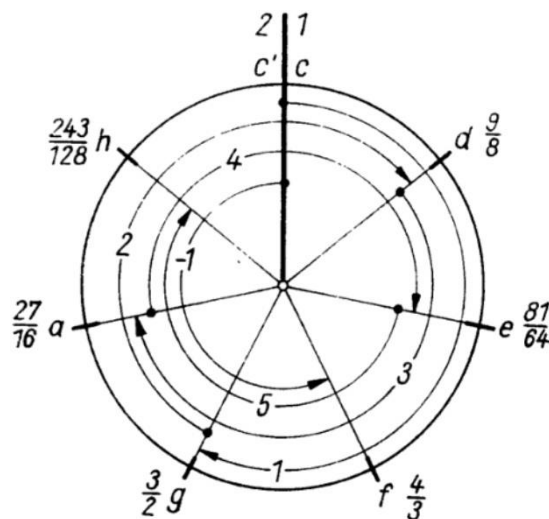


Abb. 12 „Quintenzirkel zur Konstruktion der Schwingungszahlen nach dem pythagoreischen Stimmungsprinzip“ [27, S. 51]

Durch den Quintenzirkel können die Tonleitern auch hergeleitet werden. Dieses Phänomen wird in einem späteren Kapitel im Detail behandelt werden.

Der oben gezeigte Kreis wird in sieben Sektoren unterteilt, die im Uhrzeigersinn mit der jeweiligen Tonbezeichnung beschriftet werden. Der obere Teilungspunkt bildet den Ausgangspunkt für die C-Dur-Tonleiter und ist somit mit einem c und c' beschriftet. Der Name kommt von den Quintensprüngen, die von einer Note zur nächsten gemacht werden. Die Folge ist c, g, d, a, e und h . Für

jeden Sprung wird mit der Zahl $\frac{3}{2}$ multipliziert, wird jedoch die zu c gehörige Markierung übersprungen, wird stattdessen mit dem Faktor $\frac{3}{4}$ multipliziert. Durch diese Methode erreicht man alle Verhältniszahlen der pythagoreischen Tonleiter, mit Ausnahme von f . Dies wird durch eine Quintendrehung gegen den Uhrzeigersinn erzeugt. Es wird die Verhältniszahl von c mit dem Kehrwert von $\frac{3}{4}$ multipliziert, da dieser Sprung als Überschreitung der Markierung gewertet wird. [27, S. 51f]

Jetzt sind zwar die sieben relativen Verhältnisse am Quintenzirkel erklärt, allerdings schließt der Quintenzirkel nicht exakt ab. Der Intervallschritt von c zu c' sollte den Faktor 2 haben, kann aber mithilfe dieser Methode nicht konstruiert werden. Teilt man nun die fünf großen Intervalle (also die fünf Ganztonschritte) einer Tonleiter in je zwei kleinere Intervalle, so erhält man beim Durchlaufen der Oktave von c nach c' insgesamt 12 Tonschritte. Zwölf Quintendrehungen hintereinander ausgeführt, unter Berücksichtigung, dass dabei siebenmal die Markierung überschritten wird, sollten genau sieben Oktaven ergeben.

Somit ergibt sich rechnerisch folgendes „Problem“:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : \left(\frac{2}{1}\right)^7 = \frac{531441}{524288} \approx 1,01364$$

Wäre bei der Rechnung als Lösung eine Eins herausgekommen, dann wäre der Quintenzirkel nach 12 Sprüngen geschlossen. Durch diese Rechnung weiß man nun, dass zwischen der zwölften Quinte und der siebenten Oktave, bei einem gemeinsamen Grundton, eine Differenz existiert. Diesen Unterschied von 0,01364 bezeichnet man als das „Pythagoreische Komma“, es entspricht in etwa einem Achtelton. Dieser Unterschied kann auch erzeugt werden, indem von einem Ganzton zweimal ein (kleiner) Halbton abgezogen wird.

$$\frac{9}{8} : \left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{531441}{524288} \approx 1,01364$$

Dieses Stimmungsprinzip, bei dem alle Töne aus Quintendrehungen im Quintenzirkel abgeleitet werden, heißt pythagoreisches Stimmungsprinzip. Die StreicherInnen zählen zu den wenigen MusikerInnen, die sich der pythagoreischen Tonstufen noch bedienen, da diese ihnen eine bessere Intonation ermöglicht. [27, S. 51ff]

2.2 Reine / Diatonische Stimmung

Die Gedanken von den Pythagoreern wurden weiterentwickelt und man entdeckte, dass das Monochord beim Teilungsintervall 4 : 5 bezüglich des Grundtones die große Terz erklingen lässt. „Der Kehrwert $\frac{5}{4}$ entspricht dem Verhältnis der Frequenzen.“ [27, S. 54]

Durch diesen Tonschritt kann man, da nun die übrigen Lücken geschlossen werden können, eine weitere Tonleiter aufbauen, und zwar die sogenannte diatonische Tonleiter. Somit kommt die große Terz zu den bereits geläufigen Intervallen dazu.

Um die Lücken der Dur-Tonleitern zu schließen, fehlen noch folgende Intervalle: die Septime, die Sext und die Sekund.

Die Septim liegt eine große Terz über dem Quinteton und kann somit als folgendes Verhältnis aufgeschrieben werden: [27, S. 54f]

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

Ebenso ist die Sext eine große Terz über der Quart:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

Die Sekund kann als Unterschied von Quart und Quinte berechnet werden:

$$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$$

Oder aber auch durch zwei Quinten aufwärts und eine Oktave hinab:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} : \frac{2}{1} = \frac{9}{8}$$

Für die Moll-Tonleitern fehlen noch die kleine Sekund, die kleine Terz, die kleine Sext und die kleine Septim.

Eine kleine Sekund ist das Intervall zwischen einer Quart und einer großen Terz:

$$\frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{16}{15}$$

Die kleine Terz wird durch eine große Sekund und eine kleine Sekund gewonnen:

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} = \frac{6}{5}$$

Die kleine Sext erhält man durch Aneinanderreihen von einer kleinen Terz und einer Quart:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$$

Und eine kleine Septim analog mit einer Quinte, anstelle einer Quart.

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$$

Übersicht des reinen / diatonischen Tonsystems

Tonbezeichnung	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>c'</i>
Schwingungszahl bezogen auf <i>c</i>	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
bezogen auf tieferen Nachbarton		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

Tab. 6 Übersicht des reinen / diatonischen Tonsystems [27, S. 55]

Die auf den Grundton *c* bezogenen Schwingungszahlen haben den gemeinsamen Nenner 24, somit können sie in einer ganzzahligen Proportion dargestellt werden:

$$24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48$$

Der Grund–, der Dominant– und der Subdominantakkord können durch kürzen durch einen gemeinsamen Nenner wie folgt geschrieben werden: 4 : 5 : 6. Da dieser Zahlenzusammenhang einen sehr harmonischen Zusammenklang der Töne erreicht, hat die diatonische Tonleiter auch einen zweiten Namen: die „reine“ Tonskala. [29, S. 2f]

Es geben sich mit dieser Stimmung folgende bekannte Intervalle:

Oktave	<i>c</i> – <i>c'</i>	2 : 1
Septime	<i>c</i> – <i>h</i>	15 : 8
Sext	<i>c</i> – <i>a</i>	5 : 3
Quinte	<i>c</i> – <i>g</i>	3 : 2
Quart	<i>c</i> – <i>f</i>	4 : 3
Große Terz	<i>c</i> – <i>e</i>	5 : 4
Kleine Terz	<i>e</i> – <i>g</i>	6 : 5
Große Sekund	<i>c</i> – <i>d</i>	9 : 8
Kleinere Sekund	<i>d</i> – <i>e</i>	10 : 9
Kleine Sekund	<i>e</i> – <i>f</i>	16 : 15

Tab. 7 Zahlenverhältnisse der reinen / diatonischen Intervalle [29, S. 3]

In der reinen Tonleiter kann eine Oktave je fünf Quinten, fünf Quarten, drei große und drei unterschiedliche kleine Terzen beinhalten. Durch diese Fülle an Tonintervallen, welche vor allem kleine Verhältniszahlen aufweisen, herrscht eine sehr schöne Harmonie. Deshalb ist die reine oder auch diatonische Stimmung der pythagoreischen überlegen. [27, S. 56]

Wenn wir nun diese Stimmung so wie die pythagoreische auf den Nenner 384 bringen, können wir sie miteinander vergleichen, wobei als Grundlage wieder die C-Dur-Tonleiter verwendet wird.

Tonbezeichnung	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>c'</i>
pythagoreische	384	432	486	512	576	648	729	768
reine / diatonische	384	342	480	512	576	640	720	768

Tab. 8 Vergleich der pythagoreischen und reinen / diatonischen Stimmung mit Hilfe der Verhältniszahlen [27, S. 57]

Von der Tabelle (Tab. 8) wird der Dreiklang (*c – e – g*) genauer beobachtet. In der pythagoreischen Stimmung sind die Verhältniszahlen 384 : 486 : 576 und in der reinen Stimmung entsprechen sie 384 : 480 : 576. Diese Verhältniszahlen können auch teilerfremd dargestellt werden, somit erhält man 64 : 81 : 96 für das pythagoreische und 4 : 5 : 6 für das reine Tonsystem. Für die Überlegenheit der reinen Stimmung sprechen die einfacheren und kleineren Verhältniszahlen.

Ähnlich wie bei der pythagoreischen Stimmung gibt es auch in der reinen Stimmung ein Komma. Es nennt sich das syntonische, bzw. didymische Komma (nach Didymos, einem griechischen Musiktheoretiker) und wird wie folgt berechnet: [30]

Syntonisches Komma = 2 pythagoreische Ganztöne – reine Terz = pythagoreische Terz – reine Terz

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 : \frac{5}{4} = \frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{81}{80} = 1,0125$$

Es tritt auch auf, wenn die Differenz zwischen einem großen Ganzton und einem kleinem Ganzton berechnet wird: [30]

Syntonisches Komma = großer Ganzton – kleiner Ganzton

$$\frac{9}{8} : \frac{10}{9} = \frac{81}{80} = 1,0125$$

Eine weitere Möglichkeit der Konstruktion besteht darin, den Unterschied zwischen vier reinen Quinten zu einer reinen Terz und zwei Oktaven zu berechnen:

Syntonisches Komma = 4 reine Quinten – 2 Oktaven – reine große Terz [30]

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 : \left(2^2 \cdot \frac{5}{4}\right) = \frac{81}{80} = 1,0125$$

2.3 Mitteltönige Stimmung

Die mitteltönige Stimmung wurde von Arnold Schlick, Pietro Aron und Francisco Salinas aufgestellt [31, S. 258]. Der Unterschied zur pythagoreischen Stimmung ist, dass anstelle von einer vergrößerten Terz eine verkleinerte Quinte auftritt. Im mitteltönigen Tonsystem wird alles mithilfe einer reinen Terz erzeugt. Die Aneinanderreihung von vier Quinten und Abstufung von zwei Oktaven müsste eine Terz als Ergebnis haben. Durch diese Aussage kann rückwirkend eine Rechnung aufgestellt werden. Wenn eine Terz $\left(\frac{5}{4}\right)$ um zwei Oktaven $\left(\frac{2}{1}\right)$ erhöht wird, erhält man die Rechnung: [32]

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = 5$$

Da das gleiche Ergebnis mit vier Quinten erreicht werden soll, kann man einfach die vierte Wurzel ziehen und erhält folgendes Ergebnis:

$$\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} \approx 1,4953 \dots$$

Mit diesem Wert und der reinen Terz können alle anderen Intervalle ausgerechnet werden.

Die Sekund wird mit 2 Quinten – Oktave berechnet:

$$5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} : 2 \approx 1,1180 \dots$$

Eine Oktave – eine Quinte ergibt die Quart:

$$2 : 5^{\frac{1}{4}} \approx 1,3375 \dots$$

Die Sext erhält man durch die Addition von Quinte und Sekund:

$$5^{\frac{1}{4}} \cdot \left(5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} : 2\right) \approx 1,6719 \dots$$

Und zu guter Letzt die Septime durch das Aneinanderreihen von Quinte und Terz:

$$5^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{5}{4} \approx 1,8692 \dots$$

Den Unterschied zwischen einer reinen und einer mitteltönigen Sekund, wenn diese beide gleichzeitig angespielt werden, ist für den Menschen durch 2 Schwebungen pro Sekunde zu vernehmen. Bei der mitteltönigen Stimmung gibt es im Gegensatz zur reinen Stimmung nur einen Typ von Ganztönen. [33, S. 35ff]

Harmonisch gesehen klingt das mitteltönige Tonsystem besser, allerdings gibt es immer noch gewisse Klänge, die einfach nicht rein klingen. Das bekannteste Beispiel ist die „Wolfsquinte“, die durch die Stimmpraxis aus der damaligen Zeit zwischen den Tönen *gis* – *es* entstand. Die Quinte klingt sehr unrein und unstimmig. Um diese Quinte zu vermeiden, wurden gewisse Tonarten vermieden, bzw. mussten für manche Stücke die Instrumente umgestimmt werden.

Wir haben uns die Intervalle alle nur vom Grundton *c* angesehen, was dazu führt, dass alle Intervalle gut zur C-Dur-Tonleiter passen, jedoch nicht zu anderen Tonleitern wie der A-Dur. Gewisse Instrumente sind nach einer bestimmten Dur-Tonart gestimmt, die meisten Orgeln sind zum Beispiel in A-Dur gestimmt. [32]

Jede Tonart hatte zur damaligen Zeit unterschiedliche Verhältnisse, diese Tatsache beeinflusste Komponisten zu dieser Zeit sehr stark, da die mitteltönige Stimmung bis ins 19. Jahrhundert noch allgegenwärtig war. Heutzutage sind diese Charakteristiken überliefert, aber nach der heutigen Stimmung der Tonarten kann alles gleich notiert werden. Dies wird im nächsten Kapitel behandelt. [31, S. 288]

2.4 Temperierte Stimmung

Durch den Mangel an Optionen war das gemeinsame Musizieren von verschiedenen Instrumenten nicht möglich. In der Renaissance wurde die Kirchenmusik, aber vor allem auch die Tanzmusik für die Belustigung des Volkes, immer wichtiger. Durch den Ansporn, sich mehr mit der Musik auseinanderzusetzen und sie aktiver auszuüben, wurde die Entwicklung der Musikinstrumente notwendig. In den neu entstandenen Orchestern ergab sich das Problem des unmöglichen harmonischen Zusammenspiels von unterschiedlichen Instrumenten, da diese verschiedene Grundstimmungen hatten. Die erste Idee war es, die Instrumente mit einer festen Tonlage so umzugestalten, dass sie mit anderen Instrumenten abstimmbar waren.

Bei den Tasteninstrumenten mit einer festgesetzten Stimmung wurde in die Klaviatur zwischen jeden Ganztonschritt eine Taste integriert und dadurch kann ein Ganztonschritt in zwei Halbtonschritte unterteilt werden. Allerdings ist das nicht die beste Lösung, besonders, wenn die diatonische (reine) Stimmung gewahrt werden will. [31, S. 260f]

Die Musikwissenschaftler aus der damaligen Zeit standen vor der Frage, ob unter Berücksichtigung der bisher festgelegten Verhältniszahlen außer c noch ein Grundton gewählt werden kann.

Wenn wir zum Beispiel ein cis' als Grundton verwenden wollen, zeigt sich, dass dieser nicht als Grundton geeignet ist, solange man sich innerhalb der diatonischen (reinen) Stimmungsprinzips befindet.

Um ein cis' zu erreichen, besteht die Möglichkeit von einem d eine Septime hinauf gehen. Die Septime ist durch das Intervall $c - h$ definiert, zur Oktave fehlt nur ein Halbtonschritt. Durch diese Information wissen wir, dass wir, wenn wir bei d starten, bei einem cis' landen. Wenn man sich die Proportionen von Seite 24 zur Hilfe nimmt, ergibt sich folgende Rechnung:

$$f_{cis'} = 27 \cdot \frac{15}{8} = 50,625$$

$\frac{15}{8}$ entspricht der Schwingungszahl von h bezogen auf c und die 27 ist stellvertretend für die Verhältniszahl der Frequenz von d (siehe Kapitel 2.2 Reine / Diatonische Stimmung)

Wenn wir nun von unserem neuen Grundton cis' ausgehend das f' berechnen wollen, müssen wir an $f_{cis'}$ eine große Terz $\frac{5}{4}$ hängen. (siehe Kapitel 2.2 Reine / Diatonische Stimmung)

$$f_{f'} = \left(27 \cdot \frac{15}{8}\right) \cdot \frac{5}{4} = 63,28125$$

Durch diese Rechnung erhalten wir für f' das Ergebnis 63,28125. Wenn wir allerdings von einem Grundton von c ausgehen, erhalten wir für den gleichen Ton f' den Wert 64.

$$48 \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{5}{4} = 64$$

$\frac{16}{15}$ entspricht der Schwingungszahl von einem Halbtonschritt und 48 steht für die Verhältniszahl der Frequenz von c' (doppelte von c). (siehe Kapitel 2.2 Reine / Diatonische Stimmung)

Geht man die ganze Sache von einer anderen Seite an und versucht den Grundton über das f' zu erreichen, muss man von der Verhältniszahl 64 eine große Terz runter gehen und kommt auf folgendes Ergebnis:

$$64 : \frac{5}{4} = 51,2$$

Dieser Wert von 51,2 ist allerdings nicht das cis' sondern das des' , da der Ton von der oberen Seite gefunden wurde. Dieses Phänomen hat etwas mit der enharmonischen Verwechslung zu tun, welche im folgenden Kapitel noch genauer erklärt wird.

Um die diatonische (reine) Stimmung der Intervalle (große Septime und große Terz) zu erhalten, kamen die Musiker der damaligen Zeit auf folgende Idee:

Sie bauten ein Klavier, welches anstelle der bekannten schwarzen Klaviertasten, jeweils zwei Tasten hatte, also eine kürzere und eine längere, bzw. auch zwischen $e - f$ und $h - c'$ eine schwarze Taste eingefügt hat. Somit hatte das Klavier innerhalb einer Oktave nicht mehr 12 Schritte, sondern 19 Tonschritte.



Abb. 13 Klaviatur mit 19 Tonschritten (Cembalo universale) [32]

Diese Lösung war zwar möglich, aber spieltechnisch sehr umständlich. Aus diesem Grund und auch, weil es noch weitere unlösbare Schwierigkeiten gab, wurde dieses Konzept wieder verworfen. Die einzige langfristige Lösung der Problematik war es, Abstriche bei der Reinheit der Intervalle zu machen. [27, S. 65f]

Ein weiteres Merkmal, das alle bisher erwähnten Stimmungen gemeinsam haben, ist, dass zwölf Quinten keine sieben Oktaven ($2^7 = 128$) ergeben. Dieses ist vor allem beim Quintenzirkel, der zur Transponierung und Modulation von Musikstücken verwendet wird, ein Problem, da dieser nicht ganz schließt. Bei der pythagoreischen Stimmung haben wir dies schon gesehen, wenn der

Unterschied zwischen zwölf Quinten $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129,7463 \dots$ und sieben Oktaven gemessen wird $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 \approx 1,0136 \dots$, kommt als Ergebnis das pythagoreische Komma zustande. Die reine Quinte ist etwas zu groß, um das Gewünschte zu erreichen. In der mitteltönigen Stimmung gilt $\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{12} = 5^3 = 125$ und dies ist kleiner als die gewünschten 128. In der temperierten Stimmung wird das Problem gelöst, indem der Wert $128^{\frac{1}{12}} \approx 1,4983 \dots$ als neue Quinte eingeführt wird. Durch diese neue Einteilung wird das pythagoreische Komma gleichmäßig aufgeteilt. Für eine Sekund wird eine Oktave gleichmäßig in zwölf Sekunden geteilt und somit erhält man durch die Rechnung $2^{\frac{1}{12}} \approx 1,059463094 \dots$ eine Sekund. Auch über die Sekund kann nun eine Quinte berechnet werden $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^7 = 2^{\frac{7}{12}} = 128^{\frac{1}{12}}$ [33, S. 44ff]

Wenn ein Ton mit einer Frequenz f um einen Halbton erhöht werden soll, muss dieser einfach mit der Sekund multipliziert werden: $f \cdot \sqrt[12]{2}$, bzw. für einen Ganztonschritt: $f \cdot \sqrt[12]{2^2}$.

In der untenstehenden Tabelle (Tab. 9) kann man erkennen, dass sich die temperierte Stimmung der reinen Stimmung annähert. [27, S. 67]

Töne	pythagoreische Stimmung	diatonische Stimmung	temperierte Stimmung
c	1	1	1
d	1,12500	1,12500	1,12246
e	1,26563	1,25000	1,25992
f	1,33333	1,33333	1,33484
g	1,50000	1,50000	1,49831
a	1,68750	1,66667	1,68179
h	1,89844	1,87500	1,88775
c'	2	2	2

Tab. 9 Vergleich der Schwingungszahlen in Dezimalschreibweise (bezogen auf Grundton c) [27, S. 67]

Aber ganz genau gleich sind sie dann doch nicht. Doch in der Praxis sind diese Unterschiede so gering und für die Standard-ZuhörerInnen nicht hörbar, sodass dies akzeptiert wird.

2.5 Vergleich der Stimmungen mit Hilfe der Cent-Skala

Um die verschiedenen Stimmungen besser vergleichen zu können, führte A.J. Ellis im Jahre 1884 die sogenannte Cent-Skala ein. Diese teilt eine Oktave in 1200 gleich große Teile ein. In der temperierten Stimmung hat jeder Halbtonschritt genau hundert Cent. Das Verhältnis einer Oktave beträgt $2 : 1$, somit entspricht ein Cent einem Wert von:

$$\sqrt[1200]{2} = 2^{\frac{1}{1200}}$$

Mit Hilfe des Logarithmus kann man eine Verhältniszahl I in die Cent-Skala überführen. Die Rechnung dazu lautet: $1200 \cdot \log_2(I)$. [31, S. 256]

Wenn mit Hilfe dieser Methode das pythagoreische Komma berechnet wird, kommt man auf folgende Rechnung:

$$1200 \cdot \log_2 \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{12} : 2^7 \right) \approx 23,46 \text{ Cent}$$

Somit beträgt die Abweichung um das pythagoreische Komma rund 23,5% einer kleinen Sekund. [34, S. 110f]

Natürlich kann auch das syntonische Komma mit dieser Methode berechnet werden:

$$1200 \cdot \log_2 \left(\frac{81}{80} \right) \approx 21,51 \text{ Cent}$$

Hier beträgt die Abweichung um das syntonische Komma etwa 21,5% einer kleinen Sekund. [34, S. 110f]

Als Drittes gibt es noch das Schisma, dies ist die „echte“ Differenz zwischen den beiden vorherigen Kommas, also das pythagoreische Komma minus das syntonische Komma. Bei dieser Rechnung handelt es sich dieses Mal wirklich um eine Differenz im mathematischen Sinne, da es nur um den Unterschied in Cent geht. Wenn man sich allerdings die Rechenregeln des Logarithmus ansieht erkennt man schnell, dass es auch als Division geschrieben werden kann.

$$\begin{aligned} 1200 \cdot \log_2 \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{12} : 2^7 \right) - 1200 \cdot \log_2 \left(\frac{81}{80} \right) &= 1200 \cdot \log_2 \left(\frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{12} : 2^7}{\frac{81}{80}} \right) \approx \\ &\approx 23,46 - 21,51 \approx 1,95 \text{ Cent} \end{aligned}$$

Diese 2 Cent sind nur ein sehr feiner Unterschied, aber in manchen Fällen werden auch sie tragend. (siehe Kapitel 4.3 Euler'sches Tonnetz / Euler'sche Schreibweise auf Seite 56) [35]

In folgender Tabelle werden die vier Stimmungen, die in den vorherigen Kapiteln vorgestellt wurden, mithilfe der Cent-Skala verglichen. Dies wird in Form einer Dur-Tonleiter gezeigt. In der jeweils ersten Spalte (blau) der einzelnen Stimmungen befinden sich die Intervallproportionen. In der zweiten (grün) befinden sich die auf den vorherigen Ton bezogenen Ganzton-, bzw. Halbtonschritte. Die dritte Spalte (orange) gibt die dazugehörigen Centwerte an, welche mit der obigen Formel berechnet und gerundet wurden.

	Rein			Pythagoreisch			Mitteltönig			Temperiert		
	Prop.	GT HT	Cent	Prop.	GT HT	Cent	Prop.	GT HT	Cent	Prop.	GT HT	Cent
1	1		0	1		0	1		0	1		0
2	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	204	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	204	1,1180	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	193	$(^{12}\sqrt{2})^2$	$(^{12}\sqrt{2})^2$	200
3	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{9}$	386	$\frac{87}{64}$	$\frac{9}{8}$	408	$5/4$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	386	$(^{12}\sqrt{2})^4$	$(^{12}\sqrt{2})^2$	400
4	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{15}$	498	$\frac{4}{3}$	$\frac{256}{243}$	498	1,3375	$\frac{8}{5^4\sqrt{5}}$	503	$(^{12}\sqrt{2})^5$	$^{12}\sqrt{2}$	500
5	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	702	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	702	1,4953	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	696,5	$(^{12}\sqrt{2})^7$	$(^{12}\sqrt{2})^2$	700
6	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{9}$	884	$\frac{27}{16}$	$\frac{9}{8}$	906	1,6719	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	890	$(^{12}\sqrt{2})^9$	$(^{12}\sqrt{2})^2$	900
7	$\frac{15}{8}$	$\frac{9}{8}$	1088	$\frac{243}{128}$	$\frac{9}{8}$	1110	1,8692	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	1083	$(^{12}\sqrt{2})^{11}$	$(^{12}\sqrt{2})^2$	1100
8	$\frac{2}{1}$	$\frac{16}{15}$	1200	$\frac{2}{1}$	$\frac{256}{243}$	1200	$\frac{2}{1}$	$\frac{8}{5^4\sqrt{5}}$	1200	$(^{12}\sqrt{2})^{12}$ = 2	$^{12}\sqrt{2}$	1200

Tab. 10 Vergleich der vorgestellten Stimmungssysteme [36, S. 49]

In der obigen Tabelle ist gut ersichtlich, dass die Prim (der Grundton) und die Oktave bei allen vier Stimmungen gleich sind. Wenn man die Terz von der pythagoreischen und reinen Stimmung vergleicht, ist mit Hilfe der Cent-Skala erkennbar, dass sich diese um zirka 22 Cent voneinander unterscheiden. Dies erklärt, warum die pythagoreische Terz als eher unsauber gehört wird. Da die

temperierte Terz nur 14 Cent von der reinen Terz und 8 von der pythagoreischen Terz entfernt ist, klingt sie sauberer und ist somit ein guter Kompromiss zwischen den beiden. [37, S. 48]

2.6 Die zwölf Töne der Oktave

Das Wort Oktave kommt vom lateinischen *octava* und bedeutet „acht“ [38]. Trotz des Namens hat eine Oktave nur sieben Töne, allerdings hat der achte Ton den gleichen Namen wie der erste, aber die doppelte Frequenz. Es sind nur dann sieben Töne in einer Oktave, wenn man die Töne einer Dur- oder Moll-Tonleiter zählt. Wenn man alle Zwischenschritte zählt, werden aus 7 Tonschritten, 12 Halbtonschritte. Dies lässt sich durch die Intervallschritte erklären, welche teilweise Ganztonschritte und teilweise Halbtonschritte sind.

In den westlichen Kulturen haben die Tonleitern immer acht Töne, somit passt alles zum Gesamtbild der Oktave. Jedoch sind zum Beispiel in einer D-Dur Töne vorhanden, die in einem C-Dur nicht vorhanden sind. In diesem Beispiel wären das das *fis* und das *cis*.

Um diese Töne auf einem Notenblatt zu notieren, bedarf es bestimmter Versetzungszeichen, auch Vorzeichen genannt, um die veränderten Tonhöhen zu veranschaulichen.[39]

Ein Kreuz $\sharp$ vor der Note bedeutet, die Note wird um einen Halbton angehoben. Die Notennamen werden mit der Silbe „-is“ erweitert.

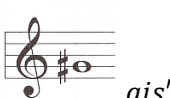
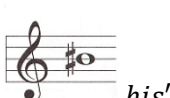
Steht ein Be $\flat$ vor einer Note, muss diese Note um einen Halbton gesenkt werden. Die Notennamen werden dann mit der Silbe „-es“ versehen.

Hierbei gibt es allerdings Ausnahmen:

- das *h* wird zu einem *b* (nicht einem *hes*)
- das *a* wird zu einem *as* (nicht einem *aes*)
- das *e* wird zu einem *es* (nicht einem *ees*)

Da diese Vorzeichen immer für einen Takt, bzw. teilweise für ein ganzes Stück gelten, gibt es auch ein Auflösungszeichen $\natural$, welches sowohl $\sharp$ als auch $\flat$ aufhebt. [39]

Somit kommt man auf folgende Noten:

$\flat$	Ausgangston	$\sharp$
 <i>ces'</i>	 <i>c'</i>	 <i>cis'</i>
 <i>des'</i>	 <i>d'</i>	 <i>dis'</i>
 <i>es'</i>	 <i>e'</i>	 <i>eis'</i>
 <i>fes'</i>	 <i>f'</i>	 <i>fis'</i>
 <i>ges'</i>	 <i>g'</i>	 <i>gis'</i>
 <i>as'</i>	 <i>a'</i>	 <i>ais'</i>
 <i>b'</i>	 <i>h'</i>	 <i>his'</i>

Tab. 11 Noten mit Vorzeichen [39]

Natürlich sind in dieser Liste nun 21 Noten, durch die enharmonische Verwechslung werden diese wieder auf 12 reduziert. Man spricht dann von 12 Halbtonschritten.

Schon Ende des 19. Jh. erkannten die Musiker, dass in speziellen Fällen noch eine Steigerung der Kreuze $\sharp$ und Bs $\flat$ von Nöten ist, welche den Effekt verdoppelt. Dies war zum einen das Doppelkreuz $\sharp\sharp$, welches einen Ton um zwei kleine Sekunden, also einen Ganzton, anhebt. Der Ton bekommt dadurch die Silbenendung -isis. Zum anderen das Doppel-b $\flat\flat$, welches einen Ton um zwei kleine Sekunden, wieder einen Ganzton, erniedrigt und bekommt die Silbenendung -eses. [40, S. 278f]

2.7 Enharmonische Verwechslung

Vor der temperierten Stimmung hatten Klaviere 19 Tasten pro Oktave, um alle Töne, die die Musikwelt zu bieten hatte, auch verwenden zu können. Allerdings war dies sehr umständlich zu spielen, da es viele Tasten gab, die nahezu ident klangen.

Durch die temperierte Stimmung braucht man plötzlich nur mehr zwölf Tasten pro Oktave am Klavier. Der Grund dafür ist, dass das pythagoreische Komma wegfällt, somit fallen manche Zwischentöne weg, da sie nun ident sind. Die Namen der verschiedenen Noten bleiben weiterhin bestehen, aber auf den neuen Klavieren sind nun die folgenden Töne ident:

<i>Cis = Des</i>
<i>Dis = Es</i>
<i>E = Fes</i>
<i>Eis = F</i>
<i>Fis = Ges</i>
<i>Gis = As</i>
<i>Ais = B</i>
<i>H = Ces</i>
<i>His = C</i>

Tab. 12 Enharmonische Verwechslung [41]

Die grau hinterlegten Töne in der obenstehenden Tabelle sind jene Töne, die auf einem modernen Klavier als schwarze Tasten dargestellt werden. Die weiß hinterlegten Töne sind trotz Vorzeichens als weiße Tasten dargestellt, weil sie durch die enharmonische Verwechslung immer noch „reine“ Töne sind.

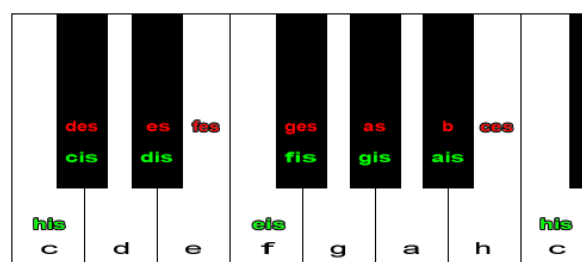


Abb. 14 moderne Klaviatur[42]

2.8 Dur- und Moll-Tonleiter

Eine Tonleiter besteht aus acht Tönen, wobei der erste immer der Grundton und der letzte Ton um eine Oktave höher als der erste ist. Die Tonleitern, die heutzutage am meisten verwendet werden, sind die Dur-Tonleiter und die Moll-Tonleiter. Der Abstand zwischen den einzelnen Tönen der Tonreihe sind immer große Sekunden, also je ein Ganztonschritt, bzw. zwei Halbtonschritte, allerdings haben beide jeweils in zwei Intervallen nur eine kleine Sekund, also einen Halbtonschritt.

Durch diesen Umstand benötigen fast alle Dur- und Moll-Tonleitern Vorzeichen, mit Ausnahme von C-Dur und A-Moll. Durch die Platzierung der Intervalle klingen die Dur-Tonleitern für unsere Ohren fröhlich und heiter. Die Moll-Tonleitern hingegen klingen eher traurig und träge.

Bei den acht Tönen einer Tonleiter spricht man von Stufen, welche von eins bis acht durchnummeriert sind, um sie besser beschreiben zu können.

Eine Dur-Tonleiter hat von der 3. auf die 4. Stufe und von der 7. auf die 8. Stufe einen Halbtonschritt.

Eine Moll-Tonleiter hat ihre Halbtonschritte von der 2. auf die 3. Stufe und von der 6. auf die 7. Stufe.

Durch diese Wahl der Halbtonschritte hat jede Dur-Tonleiter eine „parallele“ Moll-Tonleiter, welche vom Grundton ausgehend immer um eine kleine Terz tiefer ist. Umgekehrt gilt auch, dass die zu einer Moll-Tonleiter *parallele* Dur-Tonleiter eine kleine Terz über dem Grundton anfängt.

Die zueinander *parallelen* Tonleitern haben immer die gleichen Vorzeichen. Zum Beispiel haben C-Dur und A-Moll beide keine Vorzeichen. [43]

Das soeben erwähnte Moll ist strenggenommen das natürliche Moll. Es gibt neben dieser Moll-Tonleiter noch zwei weitere.

Die eine ist die harmonische Moll-Tonleiter, welche zusätzlich zu den schon bekannten Halbtonschritten zwischen der 2. und der 3. Stufe, bzw. der 5. und der 6. Stufe noch einen so genannten Hiatus-Schritt (also drei Halbtöne) von der 6. auf die 7. Stufe hat und somit von 7. zur 8. Stufe noch einen Halbtonschritt verlangt. Dies ist jedoch sehr schwer zu singen und wird deshalb heutzutage fast nicht mehr verwendet.

Die andere ist die melodische Moll-Tonleiter, welche den Hiatus-Schritt entschärfen will und dafür den Halbtonschritt zwischen der 5. und der 6. Stufe zu einem Ganztonschritt anhebt. Dadurch

sind bei dieser Tonleiter die Halbtonschritte zwischen der 2. und der 3. Stufe und der 7. und der 8. Stufe. Diese Tonleiter klingt bis auf die kleine Terz (vom Grundton gesehen) wie die Dur-Tonleiter und wird somit, außer im Jazz [44], nicht wirklich häufig verwendet.

Die Halbtonschritte kann man sich auch bildlich vorstellen und merken, wenn man sich eine Klaviatur zu Hilfe nimmt:



Abb. 15 Klaviatur [43]

Mithilfe dieser Klaviatur „spielt“ man nun eine C-Dur-Tonleiter, welche keine Vorzeichen hat, nur mit den weißen Tasten. Da zwischen den Tasten, egal ob schwarz oder weiß, immer ein Abstand von einem Halbtonschritt ist, erkennt man schnell die Ganzton- und Halbtonschritte. Da zwischen E und F, bzw. H und C keine schwarze Taste ist, muss dort ein Halbtonschritt sein, welcher dem Halbtonschritt der Dur-Tonleiter zwischen 3. und 4. Stufe, bzw. zwischen 7. und 8. Stufe entspricht.

Ähnlich ist es, wenn man die A-Moll-Tonleiter spielt, nur, dass die Stufen für H zu C und E zu F den Stufen 2. zu 3. und 5. zu 6. Stufe entsprechen.

2.9 Aufgaben für den Unterricht

Die folgenden Aufgaben werden genauer behandelt, indem jeweils die Lösung präsentiert wird, mögliche auftretende Probleme analysiert und die Voraussetzungen diskutiert werden.

Aufgabe 1: Pythagoreische Tonleiter [45, S. 45], [46, S. 26]

Es haben sich die verschiedensten Stimmungssysteme in der Musik entwickelt. Das wohl wichtigste und auch älteste ist das pythagoreische Stimmungsprinzip. Sie folgen den Saitenverhältnissen eines Monochords:

- 2 : 1 Oktave
- 3 : 2 Quinte
- 4 : 3 Quart
- 9 : 8 Ganzton

Diese Stimmung wurde von Pythagoras und seinen Anhängern, den Pythagoreern, entwickelt und entspricht, so man ihnen glauben darf, dem Harmonie- und Musikempfinden der Menschen.

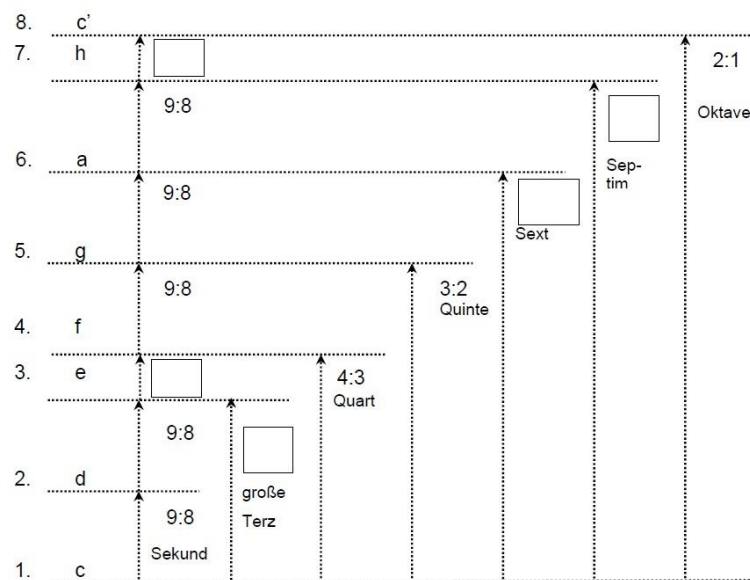


Abb. 16 Angabe Pythagoreische Tonleiter Aufgabe 1 [45, S. 45]

- a) Ergänze die fehlenden Werte in der Abbildung mit den richtigen Werten.
b) Berechne noch folgende besondere Intervalle:

von 4. nach 8.	$\frac{4}{3} \cdot x = \frac{2}{1}$	$x = \frac{3}{2}$	Quinte
von 5. nach 8.			
von 4. nach 6.			

Tab. 13 Aufgabe 1 b) Tonintervalle [45, S. 45]

- c) (Wenn ein Monochord vorhanden ist) Spiele am Monochord die 8 Töne der C-Dur-Tonleiter in pythagoreischer Stimmung nach.
d) Berechne die einzelnen Frequenzen der C-Dur-Tonleiter. (Hinweis der Ton *c* hat eine Frequenz von 220 Hz)

Lösung Aufgabe 1

- a) Zwei Intervalle zusammen müssen multipliziert werden, der Abstand zwischen zwei Intervallen muss dividiert werden.

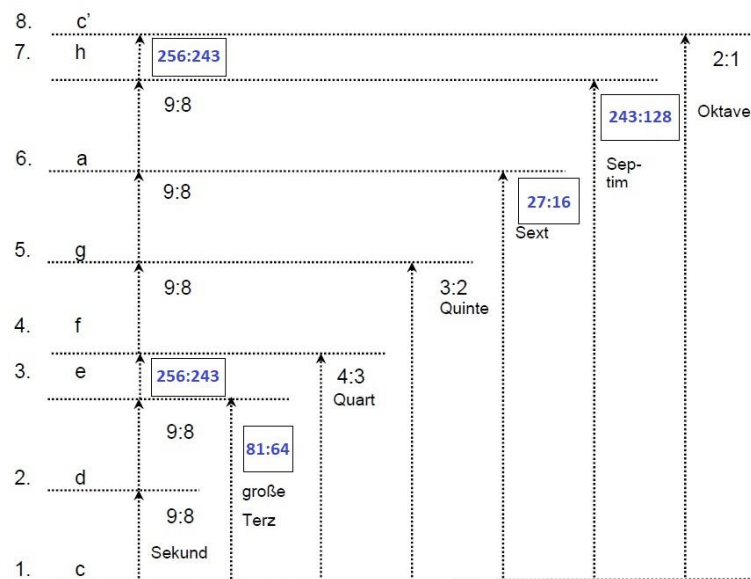


Abb. 17 Lösung Pythagoreische Tonleiter Aufgabe 1

- b) Berechnung der Intervallgrößen

von 4. nach 8.	$\frac{4}{3} \cdot x = \frac{2}{1}$	$x = \frac{3}{2}$	Quinte
von 5. nach 8.	$\frac{3}{2} \cdot x = \frac{2}{1}$	$x = \frac{4}{3}$	Quart
von 4. nach 6.	$\frac{4}{3} \cdot x = \frac{27}{16}$	$x = \frac{81}{64}$	Große Terz

Tab. 14 Lösung zu Aufgabe 1 b) Tonintervalle

- c) (Wenn ein Monochord vorhanden ist) die Saitenverhältnisse richtig belegen und spielen.
- d) (gerundete Werte)

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>c</i>
130 Hz	147 Hz	165 Hz	174 Hz	196 Hz	220 Hz	248 Hz	260 Hz

Durchführung Aufgabe 1

Für die Durchführung dieser Aufgabe müssen die SchülerInnen Kenntnisse über die Intervalle haben, vor allem wie man mit ihnen rechnet. Das Thema Brüche kommt das erste Mal in der 1. Klasse (5. Schulstufe) im Lehrplan vor, diese Aufgabenstellung sollte aber erst frühestens in der 2. Klasse (6. Schulstufe) bearbeitet werden, da erst dann das Kürzen und Erweitern von Brüchen am Lehrplan steht. [23]

Probleme Aufgabe 1

Wenn SchülerInnen die musikalischen Vorkenntnisse fehlen, kann es zu Komplikationen kommen, da sie vielleicht den Hintergrund der Aufgabe nicht verstehen, aber die Berechnungen sollten ohne Probleme möglich sein. Eine enge Zusammenarbeit mit den MusikkollegInnen ist sehr empfehlenswert.

Warum Aufgabe 1?

Mit dieser Aufgabe kann den SchülerInnen aufgezeigt werden, dass Mathematik nicht nur in der Schule eine Rolle spielt, sondern in vielen anderen Bereichen des Lebens Anwendung findet, in der Musik spielt sie im Hintergrund eine sehr wichtige Rolle. Außerdem kann man hier nochmals die Multiplikation von Brüchen üben und anwenden.

Aufgabe 2 Mittelwerte in der reinen Stimmung [36, S. 57]

Mit Hilfe des arithmetischen Mittels der Frequenzverhältnisse zweier Intervalle können andere Intervalle berechnet werden. $\frac{f_1+f_2}{2} = f_3$

Gib das Frequenzverhältnis und den Namen des Intervalls an:

- a) Prim und Oktave
- b) Prim und Sext
- c) Prim und Quinte
- d) Prim und (große) Terz
- e) Quart und Oktave

Lösung Aufgabe 2

- a) Prim und Oktave

Prim	Oktave	Rechnung	Quinte
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{\frac{1}{1} + \frac{2}{1}}{2}$	$\frac{3}{2}$

- b) Prim und Sext

Prim	Sext	Rechnung	Quart
$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{\frac{1}{1} + \frac{5}{3}}{2}$	$\frac{4}{3}$

- c) Prim und Quinte

Prim	Quinte	Rechnung	(große) Terz
$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{\frac{1}{1} + \frac{3}{2}}{2}$	$\frac{5}{4}$

- d) Prim und (große) Terz

Prim	(große) Terz	Rechnung	(große) Sekund
$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{\frac{1}{1} + \frac{5}{4}}{2}$	$\frac{9}{8}$

- e) Quart und Oktave

Quart	Oktave	Rechnung	(große) Sext
$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{1}}{2}$	$\frac{5}{3}$

Durchführung Aufgabe 2

Die Durchführung verhält sich gleich wie bei Aufgabe 1

Probleme Aufgabe 2

Wie bei Aufgabe 1 kann es auch hier zu den gleichen Problemen kommen. Leider funktioniert dies nur bei der reinen Stimmung und nicht bei anderen Stimmungen.

Warum Aufgabe 2?

Ähnlich wie bei Aufgabe 1 nur, dass man hier die Addition von Brüchen und das arithmetische Mittel genauer üben kann.

Aufgabe 3 Pythagoreisches Koma

- a) In der pythagoreischen Stimmung gibt es ein „Problem“, das pythagoreische Koma, finde heraus, worum es sich bei diesem „Problem“ handelt.
- b) Beweise rechnerisch die Existenz des pythagoreischen Kommas.
- c) In welcher Stimmung gibt es solch ein „Problem“ noch?
Wie wird es genannt und wie groß ist dort dieses Koma?
- d) In welcher Stimmung gibt es dieses „Problem“ nicht?
Beweise rechnerisch, dass dies so ist.

Lösung Aufgabe 3

- a) Siehe Kapitel Pythagoreische Stimmung (Geschichte) auf Seite 18ff.
- b) Man nehme 12 Quinten und dividiere sie durch die 7 Oktaven.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : \left(\frac{2}{1}\right)^7 = \frac{531441}{524288} \approx 1,01364$$

- c) In der Reinen / Diatonischen Stimmung

Syntonisches Koma

= 2 pythagoreische Ganztöne – reine Terz = pythagoreische Terz – reine Terz

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 : \frac{5}{4} = \frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{81}{80} = 1,0125$$

- d) In der Temperierten Stimmung

12 Halbtonschritte dividiert durch 1 Oktave ist exakt 1

$$\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{12} : 2 = 2^{\frac{12}{12}} : 2 = 1$$

Durchführung Aufgabe 3

Für die Aufgabe a) brauchen die SchülerInnen ein internetfähiges Mobiltelefon oder einen Computer, um die Recherche durchzuführen. Vom Stoff her können SchülerInnen mit den Aufgaben b) und c) zwar schon in der 5. Klasse (9. Schulstufe) umgehen, aber da bei Aufgabe d) ein rationaler Exponent vorkommt, fällt diese Aufgabe klar in die 6. Klasse (10. Schulstufe).[23]

Probleme Aufgabe 3

Die Probleme bei dieser Aufgabe liegen klar am Inhalt, da sich die SchülerInnen nicht wirklich was unter dem pythagoreischen Komma vorstellen können, anbieten würde sich hier dies über den klanglichen Unterschied zu veranschaulichen.

Warum Aufgabe 3?

Mithilfe dieser Aufgabe kann man Potenzrechnung in einem anderen Licht betrachten und nicht immer nur theoretische Beispiele durchrechnen, sondern kann aus den Ergebnissen auch Erkenntnisse ziehen. Dies führt zu einem praxisnahen und anschaulichem Unterricht, welcher in Folge die Motivation der SchülerInnen steigert.

3 Rhythmus, Metrum, Takt

3.1 Takt

Das Wort Takt kommt vom lateinischen *tactus* und bedeutet „Berührung“ oder „Stoß“ [47]. Ein Takt ist eine zeitliche Gruppierung von Noten in einem Musikstück. Dadurch entsteht eine Gliederung des Musikstückes, wobei ein ganzes Stück oder zumindest ein Abschnitt immer die gleiche Gruppierung hat. Diese Gruppierungsarten nennt man in der Welt der Musik Taktarten. Nach jedem Takt wird ein sogenannter Taktstrich gemacht, welcher durch eine vertikale Linie gekennzeichnet wird. [47]

3.2 Taktarten

Jede Taktart ist nach dem gleichen Prinzip aufgebaut und wird immer in Form eines Bruches angegeben. Der Zähler des Bruches gibt die Anzahl der Schläge pro Takt an, der Nenner hingegen gibt an, welchen Notenwert, bzw. Tonlänge ein Schlag hat.

Die meisten Taktarten geben einem Musikstück eine metrische Struktur. Darunter versteht man die verschieden starken Betonungen der einzelnen Schläge. Heutzutage wird Metrum (Metrik) und Takt gleichbedeutend verwendet, obwohl es ganz klare Unterschiede gibt. Im Falle des $\frac{4}{4}$ Taktes gibt es je nach Musikrichtung verschiedene Betonungsmuster. [47], [48]

- betont – unbetont – halbbetont – unbetont
- betont – unbetont – betont – unbetont
- unbetont – betont – unbetont – betont

Letzterer wird vor allem im Swing verwendet und wird auch Back- oder Offbeat genannt.

Man kann die Taktarten in zwei Kategorien unterteilen: einfache Taktarten und zusammengesetzte Taktarten. Zu den einfachen Taktarten zählen der für den Walzer bekannte $\frac{3}{4}$, bzw. $\frac{3}{8}$ Takt und der $\frac{2}{2}$, bzw. $\frac{2}{4}$ Takt. Der Grund, warum sie „einfach“ sind, ist der, dass sie nur eine mögliche Betonungsart haben:

- betont – unbetont – unbetont = „Dreiertakte“
- betont – unbetont = „Zweiertakte“

Die zusammengesetzten Taktarten bestehen aus zusammengefassten Zweier- und Dreiergruppen. So lassen sich also die „Zähler“ als eine Summe an Dreien und Zweien schreiben. Beispiele dafür

sind $\frac{4}{4}$; $\frac{8}{4}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{12}{16}$; und noch viele mehr. Durch die vielen Möglichkeiten der Addition von „einfachen“ Taktarten ist es nicht immer eindeutig, wie die Takte betont werden müssen. Ein Beispiel dafür wäre: $\frac{5}{4} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4}$ oder $\frac{5}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4}$. [49]

Eine andere mögliche Einteilung der Taktarten ist:

Gerade Taktarten, bestehend aus einem oder zwei Zweiertakten. (Zum Beispiel: $\frac{2}{2}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{4}{4}$)

Ungerade Takte, bestehend aus Dreier- und manchmal auch Zweiertakten. (Zum Beispiel: $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{5}{8}$; ...) [49]

Mehrere Kompositionen beginnen nicht mit einem vollständigen Takt, da die Betonung nicht zum Beginn des Stückes passt. In diesem Fall verwenden sie einen Auftakt, welcher sich in der Regel mit dem letzten Takt des Musikstückes zu einem vollständigen Takt ergänzt. Da Musikstücke über die Jahre immer häufiger mit Text versehen worden sind, wurde der Auftakt umso wichtiger, da sonst die Betonung der einzelnen Wortsilben nicht mit der Betonung der Noten übereinstimmt. Es gibt auch Komponisten, die nicht mit einem Auftakt beginnen, bzw. enden wollen, allerdings auf die Betonung achten müssen. Es gibt auch die Möglichkeit, so viele Pausen wie nötig am Anfang einzusetzen, dass es sich dann ausgeht, auf der richtigen Betonung anzufangen. [48]

3.3 Notenwerte

Da in der Musik nicht nur die Tonhöhe eine große Rolle spielt, sondern auch die Länge der einzelnen Töne, gibt es verschiedene Notenwerte, welche die Länge einer Note bestimmen. Ein Notenwert allein steht allerdings nur im Verhältnis zu anderen Noten. Die absolute Tondauer wird erst mit einer Tempoangabe und einer Taktart erkennbar.

Es gibt in den meisten Musikstücken bis zu sechs verschiedene Längen für Noten, welche immer in Bruchschreibweise benannt werden. Es gibt auch noch Spezialformen von Notenlängen, welche dann später im Detail behandelt werden. [50], [51]

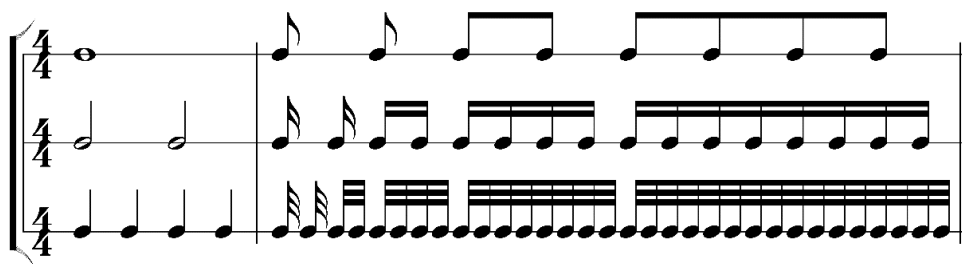


Abb. 18 Gebräuchliche Notenwerte [50]

Eine Note besteht aus diesen Elementen, dem Kopf (gefüllt oder leer), Hals (ohne oder mit) und dem Fähnchen am Hals (ohne oder mit)

In der Abb. 18 sehen wir in der ersten Spalte die ganze Note, sie besteht nur aus einem leeren Kopf und hat eine Dauer von vier Viertelschlägen. Gefolgt wird sie von der halben Note, diese besteht aus einem leeren Kopf und einem Hals, hat aber kein Fähnchen und dauert nur zwei Viertelschläge. Der letzte Notenwert der ersten Spalte ist die Viertelnote, bestehend aus einem gefüllten Kopf und einem Hals dauert sie genau einen Viertelschlag.

In der zweiten Spalte befindet sich zuerst die Achtelnote, sie besteht aus einem gefüllten Kopf, einem Hals mit Fähnchen und während eines Viertelschlags kann sie zweimal erklingen. Danach kommt die Sechzehntelnote, gefüllter Kopf mit Hals und zwei Fähnchen, die sogar viermal während eines Viertelschlags erklingen kann. Zu guter Letzt ist die Zweiunddreißigstelnote, mit ihrem gefüllten Kopf und Hals mit drei Fähnchen kann sie achtmal in einem Viertelschlag erklingen. [51]

Wie in der Abb. 18 ersichtlich ist, können Noten, die Fähnchen haben, gemeinsam mit einem durchgängigen Balken verbunden werden, damit sie besser lesbar sind. Neben den Notenwerten gibt es noch spezielle Spielformen, welche die Länge der gespielten Note verändern. „Legato“ (ital. „gebunden“) bedeutet, dass die Noten, welche mit einem Bindebogen verbunden sind, unabhängig von der Tonhöhe, ohne Unterbrechung erklingen sollen. „Staccato“ (ital. „(sich) abstoßen“ oder „abgetrennt“) wird mit einem Punkt unter der Note signalisiert und bedeutet, dass der Ton durch spezielle Techniken kürzer erklingen soll, als er eigentlich ist. „Tenuto“ (ital. „gehalten“) wird mit einem horizontalen Strich unter der Note notiert. Diese Töne müssen unter allen Umständen in voller Länge ausgespielt werden. [51]

Da nicht jedes Instrument immer spielt, bzw. jedes Stück ab und zu eine Pause braucht, sind in der Notation der Stücke nicht nur Noten, sondern auch Pausen eingetragen. Auch bei den Pausen gibt es fixe Längen. In folgender Abbildung stehen die zusammengehörigen Notenwerte und Pausenwerte übereinander.



Abb. 19 Noten- und Pausenwerte übereinander [50]

Da die Komponisten damit noch nicht ausreichend versorgt waren, haben sie noch Spezialformen entwickelt, welche die Notenwerte nochmal erweitert haben, da sie sonst zu häufig während eines Stückes die Taktarten wechseln hätten müssen oder zu viele Bindebögen hätten zeichnen müssen. Die punktierten Noten sind eine dieser Erweiterungen. Sie werden durch einen Punkt hinter dem Notenkopf symbolisiert und verlängern die Note um die Hälfte der ursprünglichen Länge. Es gibt dann noch mehrfache Punktierungen, welche die Note für jeden Punkt nochmal um die Hälfte der Erweiterung erweitert. Am besten ist das durch folgende Abbildung ersichtlich:

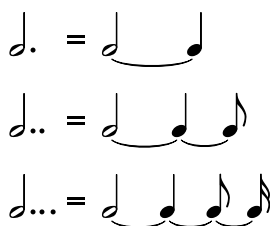


Abb. 20 Punktierte Noten [52]

In der Abbildung sieht man, dass die punktierten Noten auch mit Hilfe eines Legatos geschrieben werden können, allerdings ist es spielerisch ein Unterschied, da die einzelnen Noten innerhalb des Bindebogens meist noch ganz leicht angespielt oder betont werden, bei einer punktierten Note allerdings nicht. Einen großen Vorteil haben die punktierten Noten bei einem $\frac{3}{4}$ Takt, da eine ganze Note zu groß und eine halbe Note zu klein ist, um den ganzen Takt zu füllen, aber die punktierte halbe Note genau drei Viertelschläge dauert. [51], [52]

Eine andere Spezialform, die hier noch genauer erläutert wird, sind die Triolen. Eine Triole (lat. tri- „dreifach“) ist ein Notenwert, welcher nicht wie üblich eine Hälfte von einem anderen Wert ist, sondern ein Drittel. Das bedeutet, dass zum Beispiel drei Achteltriolen genauso lang dauern wie eine Viertelnote, drei Vierteltriolen so lange wie eine halbe Note, drei Halbetriolen so lange wie eine ganze Note und so weiter. Dargestellt wird dies mit Hilfe einer Klammer über den drei Noten und einer kleinen Drei: [51]



Abb. 21 Achteltriolen, Vierteltriolen und Halbetriolen [50]

Natürlich gibt es Triolen auch in Verbindung mit Pausen und anderen Tonlängen. So kann zum Beispiel eine Triole auch aus zwei Achtelnoten und einer Achtelpause bestehen oder aber auch aus einer Viertelnote und einer Achtelnote. Dies ist jedoch sehr selten, aber manche Komponisten verwenden sie immer wieder gerne. [51]

3.4 Tempo

Wie schon vorher erwähnt, ist ein Notenwert noch keine absolute Tondauer, denn es fehlt neben der Taktart auch an einer Tempoangabe. Unter Tempo (ital. „Zeit“, „Zeitmaß“, plural Tempi) versteht man das Zeitmaß, in welcher die Musik zu spielen ist. Somit ist auch bestimmt, wie lange ein Notenwert zu dauern hat. Zu Zeiten von Haydn und Mozart gab es ein sehr feingradiges System mit über 300 Tempi [53]. In den meisten klassischen Musikstücken sind die Tempoangaben nur ungefähr mit Hilfe von italienischen Begriffen angegeben. In der modernen Musik gibt es hingegen vermehrt genaue Angaben in Beats-per-Minute (kurz Bpm), was übersetzt die Schläge pro Minute heißt. In folgender Tabelle sind die italienischen Bezeichnungen mit ihren Bedeutungen und den ungefähren Bpm angegeben, damit sie auch vergleichbar sind.

italienische Bezeichnung	Bedeutung	Bpm
<i>Langsame Tempi</i>		
Grave	schwer	40 – 44
Largo	breit, langsam	44 – 48
Lento	langsam	48 – 54
Adagio	langsam, ruhig	54 – 58
Larghetto	etwas breit	58 – 63
Adagietto	ziemlich ruhig, ziemlich langsam	63 – 69
<i>Mittlere Tempi</i>		
Andante	gehend, schreitend	69 – 76
Andantino	ein wenig schneller als Andante	76 – 84
Maestoso	feierlich, würdevoll	84 – 92
Moderato	mäßig	92 – 104
Allegretto	etwas langsamer als Allegro	104 – 116
<i>Schnelle Tempi</i>		
Animato	belebt, lebhaft	116 – 126
Allegro	schnell, urspr. munter, fröhlich	126 – 138
Assai	sehr, viel, reichlich	138 – 152
Vivace, vivo	lebhaft, lebendig	152 – 176
Presto	sehr schnell, geschwind	176 – 200
Prestissimo	äußerst schnell	≥ 208

Tab. 15 italienische Tempobezeichnungen mit Bpm [54]

Natürlich sind Tempi keine fixen Zustände, die sich ein ganzes Musikstück nicht mehr ändern dürfen, somit ist es möglich, dass verschiedene Teile einer Komposition mit unterschiedlichen Tempi gespielt werden. Allerdings kann sich das Tempo für eine kurze Passage auch ändern, indem das Tempo schneller oder langsamer werden. Dazu stehen die Abkürzungen (Abk.) immer unterhalb der Notenzeile. Hier sind die gängigsten aufgezählt. [55], [56]

- Accelerando (ital. „schneller werdend“, Abk. „accel.“) bedeutet, dass die nächste Passage schneller gespielt wird als die vorherige.
- Stringendo (ital. „zusammendrängen“, Abk. „string.“) hat den gleichen Effekt wie Accelerando.
- Ritardando (ital. „verzögernd“, Abk. „rit.“ oder „ritard.“) bewirkt die Verlangsamung des Tempos.
- Rallentando (ital. „nachlassend, erschlaffend“, Abk. „rall.“ oder „rallent.“) wirkt ähnlich wie Ritardando, allerdings eher im Sinne von allmählich langsamer werdend.

Aber die Musik kann sogar eine kurze Zeit stehen bleiben, dies wird mit einer Fermate (ital. „anhalten“) angezeigt. Eine Fermate wird über den auszuhaltenden Ton geschrieben und muss so lange gespielt werden, bis der Dirigent anzeigt, dass weitergespielt werden darf. Danach geht im ursprünglichen Tempo weiter. Das Symbol der Fermate schaut wie folgt aus: [51], [57]



Abb. 22 Fermate [57]

3.5 Aufgaben für den Unterricht

Die Aufgaben zu diesem Thema wurden für die Unterrichtseinheiten aufgearbeitet und werden im Kapitel Evaluierung der Unterrichtsstunden ab Seite 69 besprochen.

4 „Numerik“ (Zahlenspielerereien)

In diesem Kapitel geht es um Komponisten und Musikrichtungen, welche sich gerne mit Zahlen spielen, bzw. konkreten mathematischen Mustern folgen.

4.1 Johann Sebastian Bach und die Zahl 14

Der Komponist und Musiker Johann Sebastian Bach (*1685 – †1750) gehört zu den bekanntesten seines Feldes. Dass er sich allerdings auch sehr gerne mit der „kultisch- symbolischen Bedeutung von Zahlen“ [58, S. 27] beschäftigt hat, ist nicht ganz so bekannt. Zu seinen Lebzeiten war Bach ein großer Anhänger von Gottfried Wilhelm Leibniz, einem bedeutenden Mathematiker dieser Zeit. Leibniz war nicht nur Mathematiker, sondern auch Philosoph, Jurist, Historiker und politischer Berater und er verstand die Kunst des Kombinierens. Von dieser Kunst wurde Bach stark beeinflusst und geleitet.

Seinen eigenen Familiennamen B A C H findet man als die vier entsprechenden Töne *a, b, c, h* in vielen Stücken von Bach wieder. Diese Töne liegen auf der chromatischen Tonleiter direkt nebeneinander. Aufsteigend haben sie folgende Reihenfolge: *a – b – h – c*, absteigend: *c – h – b – a*. Wenn sie die Reihenfolge seines Namens (*b – a – c – h*) behalten, bilden sie ein Kreuz [58, S. 27]



Abb. 23 Johann Sebastian Bach als Noten [59, S. 81]

Johann Sebastian Bach war aber nicht nur von den vier Tönen *a, b, c, h* fasziniert, sondern auch von der Kombinatorik und somit hat er jedem Buchstaben seines Nachnamens, die im Alphabet zugehörige Zahlen, zugeordnet. Also dem *B = 2*, *A = 1*, *C = 3* und *H = 8*. Wenn diese Zahlen nun addiert werden, erhält man die Zahl 14. [58, S. 27f]

$$B + A + C + H \cong 2 + 1 + 3 + 8 = 14$$

Diese Zahl kommt häufig in seinen Stücken vor, zum Beispiel sieht man das bei einem seiner berühmtesten Werke *Die Kunst der Fuge*. Das Werk besteht aus vier Kanons und vierzehn Fugen. Begonnen wird in diesem Musikstück mit der ersten Fuge, welche in *d*-Moll geschrieben steht. Die nächsten zwölf Fugen sind jeweils Kontrapunkte (also Variationen) von der ersten. Die vierzehnte Fuge hat das für Bach typische Thema *b – a – c – h* zu Grunde gelegt. [60]

Wenn man nun noch die Initialen seines Vornamens dazu nimmt, erhält man folgende Rechnung:

$$J + S + B + A + C + H \cong 9 + 18 + 2 + 1 + 3 + 8 = 41$$

Falls sich jemand wundert, warum $J = 9$ und $S = 18$ ist und nicht je eins höher, muss bedacht werden, dass hier von dem „natürlichen Zahlen Alphabet“ ausgegangen wird. In diesem fallen die Buchstaben J und I zusammen und ebenfalls U, V und W, also gibt es dort nur 23 Buchstaben (siehe Abb. 24)

1 a	2 b	3 c	4 d	5 e
6 f	7 g	8 h	9 i	10 k
11 l	12 m	13 n	14 o	15 p
16 q	17 r	18 s	19 t	20 u
21 x	22 y	23 z		

Abb. 24 Natürliche Zahlen Alphabet [61]

Mit der Zahl 41 spielte sich Bach auch, aber erst gegen Ende seiner Schaffenszeit. Zum Zeitpunkt seines allerletzten Werkes, dem Choralvorspiel *Vor deinem Thron tret ich hiermit*, war Johann Sebastian Bach schon blind und musste dieses Werk seinem Schüler diktieren. Das gesamte Stück beinhaltet insgesamt 1681 Töne ($41 \cdot 41 = 1681$), die Melodiestimme der Choralzeile „Ich trete vor dich in höchster Not“ umfasst exakt 14 Noten. Somit tritt Bach selbst vor den Thron Gottes, zumindest symbolisch gesehen. Die Melodie aller Verse umfasst außerdem noch 41 Noten.

Bach nahm jedoch nicht nur seinen eigenen Namen als Ausgangspunkt, um mit Zahlen zu spielen. In seinem Werk der 43 Credo-Rufe, einer Messe in *h*-Moll, entspricht die Summer der Buchstaben genau der Zahl:

$$C + R + E + D + O \cong 3 + 17 + 5 + 4 + 14 = 43$$

Auch in der 63 Christus-Anrufung der Matthäuspassion versteckt sich eine Summe:

$$49 (= 7 \cdot 7) + 14 = 63 \quad [62], [63]$$

4.2 Zwölftonmusik

Im Normalfall richtet sich die Komposition von Musik immer nach dem Gehör, dem ist allerdings nicht so bei der Zwölftonmusik. Diese Art der Komposition gleicht mehr einem mathematischen Verfahren, sie muss fixen Regeln und Gesetzen folgen, welche jetzt am Anfang einmal erklärt werden.

Die Zwölftonmusik, bzw. auch Zwölftontechnik oder Dodekaphonie genannt (kommt aus dem Griechischen dodeka = zwölf, phone = Stimme), wurde in den Jahren um 1920, von einer Gruppe Wiener Musiker und Komponisten rund um Arnold Schönberg, entwickelt. Diese Gruppe wurde später auch die *Schönberg-Schule* oder *Wiener Schule* genannt. [64]

Schönberg versuchte mit dieser Kompositionsweise aus der bisherigen Struktur auszubrechen und seinem theoretischen Bestreben nach einer neuen und lehrbaren Ordnung nachzugehen. Seine Lösung war die „Methode der Komposition mit zwölf nur aufeinander bezogenen Tönen“. [65]

Die Zwölftonmusik besteht aus Zwölftonreihen, jedes dieser Bauelemente besteht aus einer festgelegten Reihenfolge von 12 Tönen der chromatischen Tonleiter, um genauer zu sein aus 11 Intervallen. Bevor ein Ton wiederholt werden darf, müssen die restlichen Töne erklingen sein. Tonwiederholungen sind nur in seltenen Ausnahmefällen erlaubt, denn es ist laut Schönberg, alles zu vermeiden, was einem einzelnen Ton ein Übergewicht gibt. Zu Beginn verbot Schönberg, dass sich einzelne Töne in direkter Abfolge wiederholen dürfen, dies wurde aber dann zum Glück gelockert. Diese späteren Freiheiten führten dann zu Situationen, in welchen die ersten vier Töne einen Akkord bildeten und mit den anderen acht Tönen eine Melodie gespielt wurde, welche parallel gespielt wurde. [65]

Die erste Reihenfolge der 12 Töne nennt man die Grundform, aber natürlich gibt es nicht nur eine Form. Es können die Intervalle umgedreht werden, also eine vertikale Spiegelung der Grundform, dies nennt man dann die Umkehrung. Wenn die Grundform vom letzten Ton bis zum ersten gespielt wird, handelt es sich dabei um eine horizontale Spiegelung, welche als Krebs bezeichnet wird. Als vierte Möglichkeit kann der Krebs auch noch vertikal gespiegelt werden, bzw. die Umkehrung von hinten nach vorne gespielt werden, was sich dann der Krebs der Umkehrung nennt. Zu guter Letzt, können alle vier Formen transponiert werden, um auf einem der zwölf Töne der

chromatischen Tonleiter zu starten. Durch diese Möglichkeiten kann jede Grundform in insgesamt 48 Variationen gespielt werden. [66]

In den folgenden Abbildungen (Abb. 25 bis Abb. 28) sind die vier Variationen der Hauptmelodie von Alban Bergs Violinkonzert. Auch wenn man nie gelernt hat Noten zu lesen, sind die Symmetrien der einzelnen Modi gut erkennbar.



Abb. 25 Grundform Alban Bergs Violinkonzert [66]



Abb. 26 Umkehrung Alban Bergs Violinkonzert [66]

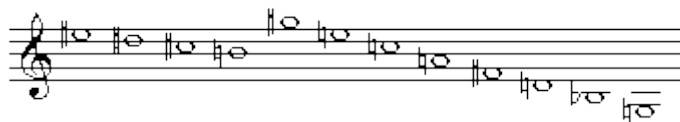


Abb. 27 Krebs Alban Bergs Violinkonzert [66]

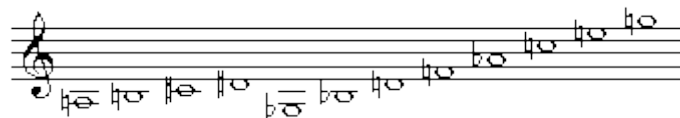


Abb. 28 Krebs der Umkehrung Alban Bergs Violinkonzert [66]

Bei einer kompositorischen Umsetzung der Zwölftontechnik sind für einzelne Töne die Oktavlagen frei wählbar. Das heißt wenn ein c vorkommt, darf bis zum Ende der Reihe auch kein c' , großes C oder andere Oktaven vorkommen. Wenn ein Intervall in der Grundform von $b - f$ eine absteigende Quart ist, darf es in einer anderen Zwölftonreihe auch eine aufsteigende Quinte $b - f'$ sein. Schönberg hat für seine Kompositionsskizzen eigene Intervallsymbole eingeführt. Zum Beispiel bedeutet $K + 2$, dass es der Krebs der Grundform ist und um 2 Halbtonschritte (eine große Sekund) nach oben transponiert ist. Ein $KU(e)$ bedeutet, dass es sich um einen Krebs der Umkehrung handelt und der erste Ton der Folge ein e ist. [64]

Aus dem Klavierstück (op. 33a), wird nun ein Teil der Partitur gezeigt, in welchem die Grundreihe und Umkehrung von 1 bis 12, bzw. die Krebsformen von 12 bis 1 nummeriert sind (siehe rote Zahlen).

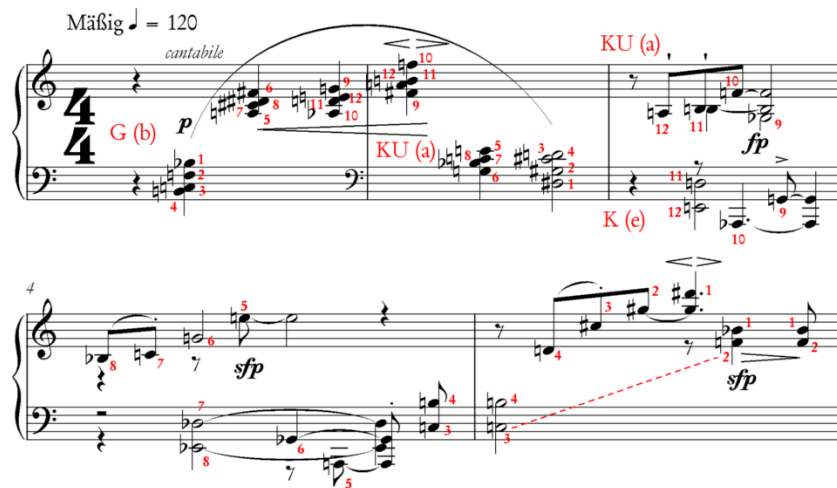


Abb. 29 Schönberg, Klavierstück op. 33a, Takt 1 bis 5 mit Reihenanalyse [64]

Der erste Takt beginnt mit der Grundreihe, welche mit einem *b* beginnt, deren Töne sind zu jeweils vierstimmigen Akkorden zusammengelegt. Der zweite Takt beginnt mit einer Krebsumkehrung, beginnend mit einem *a*, auch in diesem Takt sind die Töne in jeweils vierstimmige Akkorde eingeteilt. Etwas anders verhalten sich die Takte drei bis fünf. Hier starten ein Krebs und eine Krebsumkehrung gleichzeitig. Hier wird die Krebsumkehrung mit der rechten und der Krebs mit der linken Hand gespielt. [64]

Die mathematische Seite der Zwölftontechnik wurde von Eberhardt Klemm mit dem Aufsatz *Zur Theorie einiger Reihen-Kombinationen* im Jahr 1966 beschrieben. Klemm nahm sich dabei aus Schönbergs Violinkonzert op. 36 die Grundreihe und ersetzte die Töne durch Zahlen. Der Anfangston der Reihe ist ein *a* und wurde mit der 0 ersetzt. Als nächstes folgt ein *b*, welches um einen Halbton höher liegt und somit die Zahl 1 erhielt. Dies durchlief alle 12 Töne, bis jeder Ton eine Zahl von 0 – 11 erhielt, je nachdem wie viele Halbtöne der jeweilige Ton höher ist als der Anfangston. Klemm bezieht sich weniger auf real komponierte Strukturen, sondern mehr auf theoretische Einsichten in die Struktur dieser Musikrichtung. Er wird mehr von dem Interesse an mathematischen Analysemethoden geleitet, welches in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts vertreten war. [64]

Eine andere Methode, welche sich mehr durchgesetzt hat, ist die Methode der Tonhöhenklassen von Allen Forte. Hier wird nicht dem ersten Ton der Reihe die Zahl 0 zugeordnet, sondern dem *C*. Die restlichen Zahlen von 1 – 11 werden den aufsteigenden Tönen der chromatischen Tonleiter zugeordnet. Aufgrund der enharmonischen Verwechslung werden zum Beispiel die Töne *His* und *Deses* dem Ton *C* zugeordnet. Der Vorteil dieses Systems ist, dass sozusagen gleiche Töne von verschiedenen Oktaven trotzdem die gleiche Zahl zugeordnet bekommen. Um der enharmonischen

Schreibweise zu entgehen, beschreibt man die Tonhöhen mit Hilfe von Zahlen. Dazu wurde folgende Formel entwickelt, in die man die Grundfrequenz der Töne (f in Hz) einsetzt und eine Zahl $p \in \mathbb{R}$ erhält. [67]

$$p = 69 + 12 \log_2(f/440)$$

Die Formel schafft es, dass jede Oktave genau die Größe 12 und jeder Halbton genau die Größe 1 besitzt. Außerdem hat das eingestrichene C die Zahl 60, und alle Töne, die sich um eine Oktave unterscheiden, differieren im Wert um genau 12. Um diese Methode der Tonhöhenklassen darzustellen, sind alle Tonhöhen derselben Tonhöhenklasse zusammenzufassen. Zum Beispiel alle C haben folgende Form:

$$k \cdot 12 + 0 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Um die anderen Töne zu erhalten, muss nur die 0 durch eine andere natürliche Zahl zwischen 0 und 11 ersetzt werden. Ein Quotientenraum ist das Ergebnis, dieser wird von MusikerInnen Tonhöhenraum und von MathematikerInnen $\mathbb{R}/12\mathbb{Z}$ genannt wird. Dies kann gut in einer Tabelle veranschaulicht werden. Um jedoch die 10 nicht mit 1 und 0, bzw. 11 mit 1 und 1 zu vertauschen, haben sich die Theoretiker auf Buchstaben geeinigt. t („ten“) und e („eleven“), bzw. A und B sollten dafür sorgen, dass dieser Fehler nicht passieren kann. [67] Das k entscheidet in der Formel über die Oktavenhöhe.

TK – Tonklassen	Tonales Äquivalent
0	C (His, Deses)
1	Cis, Des (Hisis)
2	D (Cisis, Eses)
3	Dis, Es (Feses)
4	E (Disis, Fes)
5	F (Eis, Geses)
6	Fis, Ges (Eisis)
7	G (Fisis, Ases)
8	Gis, As
9	A (Gisis, Heses)
t oder A	Ais, B (Ceses)
e oder B	H (Aisis, Ces)

Tab. 16 Tonhöhenklassentabelle [67]

4.3 Euler'sches Tonnetz / Euler'sche Schreibweise

Der Mathematiker Leonhard Euler (*1707 – †1783) hat neben seinen großen Verdiensten in der Mathematik, Physik, Astronomie und Geografie auch einen Teil zur Musik beigetragen. Er hat die Feinanalyse in reiner Stimmung bei Musikstücken eingeführt. [68]

Da man eine reine Terz nicht mit Quinten bzw. umgekehrt auch eine Quinte nicht mit reinen Terzen darstellen kann, hat sich Euler ein zweidimensionales Beziehungsgeflecht für die reine Stimmung erstellt. Dieses beinhaltet Quintenreihen, die sich nur um das syntonische Komma unterscheiden. In diesem Beziehungsgeflecht reihen sich Terzen in vertikaler und Quinten in horizontaler Richtung: [69]

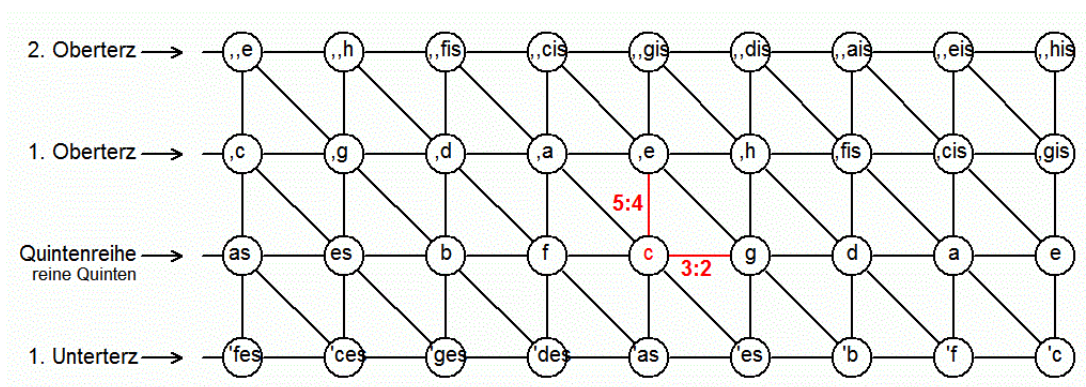


Abb. 30 Euler'sches Tonnetz (Quinte-Terz-Schema) [68]

Die Eulerschreibweise $,x$ („Tiefkomma x “), bzw. $'x$ („Hochkomma x “) bedeutet, dass dieser Ton um ein syntonisches Komma tiefer, bzw. höher ist als der Ursprungston x . Wichtig ist, dass das Komma vor der Tonbezeichnung steht. In manchen Fällen wird auch $\underline{x}$ statt $,x$, bzw. $\bar{x}$ statt $'x$ geschrieben.

In der Grafik des Tonnetzes sind die Oktavenlagen der Töne nicht fixiert, das heißt, dass zur Berechnung der richtigen Intervallverhältnisse das Vielfache der entsprechenden Oktave $\frac{2}{1}$ weg- oder hinzugerechnet werden muss. Zum einfacheren Lesen, und damit man nicht mit den „Vorkommata“ und den Oktaven-Strichen durcheinanderkommt bzw. es für alle Oktaven gilt, sind die Töne so ähnlich wie bei den Tonhöhenklassen alle in einer Oktave geschrieben. (siehe Kapitel 4.2)

In dieser Schreibweise sehen Tonleitern wie folgt aus:

...																	
<i>Es-Dur</i>	<i>es</i>	<i>f</i>	<i>,g</i>	<i>as</i>	<i>b</i>	<i>,c</i>	<i>,d</i>	<i>es</i>	<i>,c-moll</i>	<i>,c</i>	<i>,d</i>	<i>es</i>	<i>,f</i>	<i>,g</i>	<i>as</i>	<i>b</i>	<i>,c</i>
<i>B-Dur</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>,d</i>	<i>es</i>	<i>f</i>	<i>,g</i>	<i>,a</i>	<i>b</i>	<i>,g-moll</i>	<i>,g</i>	<i>,a</i>	<i>b</i>	<i>,c</i>	<i>,d</i>	<i>es</i>	<i>f</i>	<i>,g</i>
<i>F-Dur</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>,a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>,d</i>	<i>,e</i>	<i>f</i>	<i>,d-moll</i>	<i>,d</i>	<i>,e</i>	<i>f</i>	<i>,g</i>	<i>,a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>C-Dur</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>,e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>,a</i>	<i>,h</i>	<i>c</i>	<i>,a-moll</i>	<i>,a</i>	<i>,h</i>	<i>c</i>	<i>,d</i>	<i>,e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>
<i>G-Dur</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>,h</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>,e</i>	<i>,fis</i>	<i>g</i>	<i>,e-moll</i>	<i>,e</i>	<i>,fis</i>	<i>g</i>	<i>,a</i>	<i>,h</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>D-Dur</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>,fis</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>,h</i>	<i>,cis</i>	<i>d</i>	<i>,h-moll</i>	<i>,h</i>	<i>,cis</i>	<i>d</i>	<i>,e</i>	<i>,fis</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>,h</i>
<i>A-Dur</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>,cis</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>,fis</i>	<i>,gis</i>	<i>a</i>	<i>,fis-moll</i>	<i>,fis</i>	<i>,gis</i>	<i>a</i>	<i>,h</i>	<i>,cis</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>,fis</i>
...																	
Alternativ zum Beispiel									<i>c-moll</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>'es</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>'as</i>	<i>'b</i>	<i>c</i>

Tab. 17 Reine Tonleitern nach Eulerschreibweise [69]

Wenn man sich das Tonnetz zu Nutze machen will, kann man sich die Struktur aus Abb. 30 zu Nutze machen, darin liegen alle Töne von der reinen *C-Dur*-Tonleiter, in Eulerschreibweise.

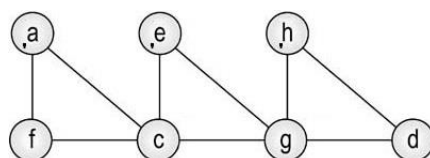


Abb. 31 Eine *C-Dur*-Tonleiter in harmonisch-reiner Quinte-Terz Stimmung [68]

Diese Figur kann man auf jede beliebige Position des Euler'schen Netzes legen und hat automatisch auf der Position von dem *c* den Grund- und Oktav-Ton der Dur-Tonleiter. Für die Moll-Tonleiter befindet sich der Grundton in der linken oberen Ecke.

Mathematisch gesehen bietet das Tonnetz eine schöne Rechenmöglichkeit, um die einzelnen Intervalle zwischen Tönen auszurechnen. Wenn von einem Ton aus horizontal nach rechts gegangen wird, wird mit der Zahl $\frac{3}{2}$ multipliziert, wenn nach links gegangen wird, muss man durch die Zahl $\frac{3}{2}$ dividieren. Ähnlich verhält es sich, wenn man sich vertikal bewegt, hier ist es nach oben eine Multiplikation mit der Zahl $\frac{5}{4}$, nach unten eine Division durch dieselbe Zahl. Zu beachten ist, dass

es sich immer noch um Quinten und Terzen handelt, also muss bei Bedarf mit der Zahl $\frac{2}{1}$ dividiert oder multipliziert werden, um die Oktavenunterschiede weg zu rechnen. Als Hinweis kann man geben, dass innerhalb einer Oktave das Verhältnis nicht größer als $\frac{2}{1}$ sein darf, bzw. solange man von einem niedrigeren Ton auf einen höheren geht, darf das Verhältnis auch nicht kleiner als $\frac{1}{1}$ sein. [68]

Natürlich kann man immer mit Quinten und Terzen rechnen, aber Euler hat es geschafft, dies in einem zweidimensionalen Beziehungsgeflecht darzustellen, welches eine Tonleiter und andere Beziehungen zwischen Tönen gut darstellt. Mit Hilfe dieses Tonnetzes kann man diese Beziehungen einfach und spielerisch in einem fachübergreifenden Unterricht zur Schau stellen.

4.4 Das musikalische Würfelspiel

Am Ende des 19. Jahrhunderts kam in Europa eine neue Art des Würfelspiels auf. In diesem Spiel ging es darum, durch die Zufallsergebnisse zweier Würfel ein Musikstück zu komponieren.

Dies wurde sogar in der Pariser Zeitung *Journal des Luxus und der Moden* im Jahre 1787 in einem Artikel beschrieben:

„Einer der neuesten modischen Zeitvertreibe in Gesellschaften ist jetzt in Frankreich das musikalische Würfel-Spiel; wo jedermann, der nur ein bißgen Clavier spielen kann, ohne ein Wort von Composition zu verstehen, vermittelt zweyer Würfel und eines Notenblatts, Menuets ins Unendliche komponiren kann. Keiner unserer Leser wird hoffentlich diese Kunst für Hexerey, oder für mehr halten als was sie ist: nemlich einen glücklichen Einfall eines guten mathematischen Kopfs, die müßige frivole Pariser Welt mit einer musikalischen Posse auf etliche Tage zu amüsiren.“ [70]

Das wohl bekannteste Würfelspiel dieser Art ist von Wolfgang Amadeus Mozart erstellt worden, jedoch war er nicht der erste. Denn die älteste Methode, um ein Musikstück auf diese Art zu komponieren, stammt von Johann Philipp Kimberger, welcher diese schon im Jahre 1767, unter dem Titel *„Der allezeit fertige Polonoisen- und Menuettencomponist“*, herausgebracht hat. [71]

Mozarts Würfelwalzer

Mozarts erstes bekanntes musikalisches Würfelspiel war die *„Anleitung zum Componieren von Walzern vermittelt zweier Würfel“*, welches nach seinem Tod im Jahr 1793 erschien. Auch wenn es umstritten ist, dass Mozart der Autor des Stückes ist, ist bekannt, dass er sich solchen Spielereien hingegen hat. Dieser Würfelwalzer besteht aus zwei Tabellen und vier Seiten mit Takten.

Der „Komponist“ bzw. die „Komponistin“ benötigt zum Erstellen eines Musikstückes zwei Würfel. Die Tabellen geben an, welcher Takt, bzw. welcher Teil der Musik gerade gewürfelt wird. Durch das gewürfelte Ergebnis (die Summe der Augenzahlen der beiden Würfel) findet man in der Tabelle je elf Zeilen und acht Takte pro Walzerteil. Die acht sind mit den Buchstaben von A bis H beschriftet. In diesem Feld steht eine Zahl, diese muss danach auf dem Taktblatt (siehe Abb. 32) gesucht werden und nach der Reihe hingeschrieben werden. [72, S. 201f]

Falls eine Person als ersten Wurf eine 10 hat, wird der Takt 98 als erstes auf ein leeres Notenblatt geschrieben. Ist der zweite Wurf eine 5, dann wird der Takt 17 als nächstes auf das Notenblatt geschrieben. Nach diesem Schema entsteht nach acht Würfeln der Teil Eins des Walzers, und nach weiteren acht Würfeln der Teil Zwei. Zu guter Letzt wird zwischen den beiden Teilen ein Repetitionszeichen, als eine Wiederholung, eingebaut. Dadurch wird der erste Teil zweimal gespielt und danach der Zweite. Falls einem das Stück zu kurz ist, kann man danach wieder von vorne anfangen, allerdings sollte man immer erst nach weiteren acht Würfeln aufhören. [73, S. 197]

1. Walzerteil

Takt → Augensumme ↓	A	B	C	D	E	F	G	H
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Tab. 18 Mozarts Würfelwalzer Teil 1 [73, S. 198]

2. Walzerteil

Takt → Augensumme ↓	A	B	C	D	E	F	G	H
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	179	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Tab. 19 Mozarts Würfelwalzer Teil 2 [73, S. 198]

Auf folgenden sechs Abbildungen sind jeweils die Takte mit Zahlen gekennzeichnet, welche den Nummern in der obigen Tabelle zugeordnet sind. Takte, die neben einer Zahl noch ein „a“, bzw. ein „b“ dabei haben, gehören zusammen und müssen hintereinandergeschrieben werden, also vorher 5a und danach 5b. Um genau zu sein, tritt dieser Fall immer beim letzten Würfeln aus Teil 1 ein. Also bei den Takten: 5, 24, 30, 33, 81, 91, 94, 100, 107, 123, 127 [72, S. 202ff]

Notentabelle zu den Würfelswalzern (Mozart?)

The musical score is titled "Notentabelle zu den Würfelswalzern (Mozart?)". It is written in 3/4 time and consists of two main parts, each with five systems of two staves (treble and bass clef). The first part contains measures 1 through 27, and the second part contains measures 28 through 127. Measures are numbered at the beginning of each staff line. Some measures are labeled with 'a' or 'b' (e.g., 5a, 5b, 24a, 24b, 30a, 30b, 33a, 33b, 81a, 81b, 91a, 91b, 94a, 94b, 100a, 100b, 107a, 107b, 123a, 123b, 127a, 127b). The notation includes various musical symbols such as notes, rests, and bar lines.



Abb. 32 Sechs Notentafeln des Würfelwalzers von Mozart [72, S. 207f]

Im Anschluss befinden sich noch zwei Walzerbeispiele, die mit Hilfe der Würfelmethode erstellt wurden:

Ein Würfelmennett (nach W. A. Mozart)

Zwei Würfelwalzer nach Mozart in einem gemeinsamen System gesetzt

Abb. 33 Zwei Beispiele für Würfelmennett und Würfelwalzer [72, S. 208]

Bei diesen beiden Beispielen wurden unter jeden Takt die dazugehörige Zahl des Taktes geschrieben. Das erste Stück wurde genau nach der Anleitung erstellt. Bei dem zweiten Musikstück wurden zwei

Walzer übereinander notiert. Somit sind die harmonischen Strukturen besser ersichtlich. [72, S. 208]

Für ein Musikstück dieser Art braucht man 16 Takte. Für jeden Takt gibt es 11 Möglichkeiten zur Auswahl. Somit braucht man $11 \cdot 16 = 176$ Takte, welche auch bei Abb. 32 ersichtlich sind.

Naiv gesehen gibt es insgesamt 11^{16} Möglichkeiten die Takte in dieser Form anzuordnen. [74] Da Mozart einige Takte doppelt verwendet hat, siehe Tab. 18 und Tab. 19, die zu Spalte H zugehörigen Takte sind alle ident, muss man die Rechnung etwas anpassen, nämlich zu $2 \cdot 11^{14}$. Somit bekommt man als Ergebnis die große Zahl von $759\,499\,667\,166\,482 \approx 7,6 \cdot 10^{14}$. Damit will man veranschaulichen, dass jedes Stück, das auf diese Weise „komponiert“ wird, nahezu einzigartig ist. Wer jetzt meint, jedes Mal einen neuen Walzer zu kreieren, liegt leider falsch, da nach dem Anhören von zwei oder drei Stücken alle Walzer sehr ähnlich klingen. Das menschliche Ohr ist daran gewöhnt, nicht nur einzelne Töne und Tonfolgen zu hören, sondern versucht unbewusst immer eine Melodie und Struktur zu erkennen. [75, S. 174f]

Eben diese harmonischen Strukturen, die der Mensch erkennt und vergleicht, sind in den Würfelkompositionen derselben Vorlage sehr ähnlich. Grund dafür ist, dass die Komponisten zu Beginn eine Vorlage komponierten und dann mit dem gleichen harmonischen Schema weitere Variationen dazuschrieben. Bei einem Würfelspiel mit einem Würfel ergibt das je fünf weitere und mit zwei Würfeln je zehn weitere Variationen. Durch diese Variationen sind die Takte unter sich austauschbar und es kann dann erwürfelt werden, aus welcher Variation der Takt gespielt wird. Im Grunde verändern sich nur Melodie und Rhythmus über einer gemeinsamen Harmonie. Ohne diese zuletzt erwähnte Bedingung ist das Würfelspiel auch nicht möglich. Noch dazu müssen die Stücke auch gleichförmig und periodisch aufgebaut sein. Beispiele dafür wären Polonaisen, Menuette und Walzer. [73, S. 199ff]

4.5 Aufgaben für den Unterricht

Aufgaben zum Würfelwalzer

Nötige Angaben sind:

- Tab. 18 Mozarts Würfelwalzer Teil 1 [73, S. 198] (Siehe Seite 60)
- Tab. 19 Mozarts Würfelwalzer Teil 2 [73, S. 198] (Siehe Seite 60)
- Abb. 32 Sechs Notentafeln des Würfelwalzers von Mozart [72, S. 207f] (Siehe Seite 62 und davor)
- Abb. 34 Anleitung für den Würfelwalzer im Unterricht (in „altem“ Deutsch) [72, S. 205] (Siehe Seite 64)

Anleitung

1) Die grossen Buchstaben A bis H, welche über den 8 Columnen der Zahlentafeln stehen, zeigen die 8 Takte eines jeden Theils des Walzers an, z.B. A den ersten, B den zweiten, C den dritten u.s.w. und die Zahlen in der Column darunter zeigen die Nummer des Taktes in den Noten.

2) Die Zahlen von 2 bis 12 geben die Summe der Zahlen, welche man mit zwei Würfel werfen kann.

3) Man wirft also z.B. für den ersten Tackt des ersten Theils des Walzers mit zwei Würfeln 6 und sucht neben der Zahl 6 in der Column A die Nummer des Taktes 148 in der Musiktafel. Diesen Takt schreibt man aus und hat den Anfang des Walzers. Nun wirft man für den zweiten Takt z.B. 9 und sucht neben 9 unter B und findet 84 in der Musiktafel. Diesen Tackt schreibt man nun zum ersten und so fährt man fort, bis man nach 8 Würfeln den ersten Theil des Walzers fertig hat. Dann setzt man das Repetitionszeichen und geht zum zweiten Theile über. Will man einen längern Walzer haben, so fängt man noch einmal von vorne an und so gehts ins Unendliche fort.

Abb. 34 Anleitung für den Würfelwalzer im Unterricht (in „altem“ Deutsch) [72, S. 205]

Aufgabe 1 Erste Erfahrungen mit dem gewürfelten Walzer [72, S. 209]

Nehmt zu zweit ein Notenblatt und zwei Würfel und „komponiert“ zwei Walzer nach der Anleitung. Wenn ihr fertig seid, bittet die Lehrperson, den Walzer vorzuspielen und vergleicht die beiden Stücke.

Alternative: Für den Computer gibt es mehrere Programme, die diesen Vorgang erleichtern können und noch dazu das Vorspielen erledigen.

Durchführung Aufgabe 1

Diese Aufgabe ist im Normalfall nur mit dem Unterrichtsfach Musik kombinierbar, da man eine Lehrperson braucht, die Klavier spielen kann, oder man findet ein passendes Computerprogramm dafür. Die ganze Unterrichtsreihe sollte frühestens in der 6. Klasse (10. Schulstufe) gemacht werden, da erst in dieser Schulstufe die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt [23].

Probleme Aufgabe 1

Wenn man keine/n MusiklehrerIn hat, der/die einen unterstützt, kann man diese Einheit auch auslassen oder mit dem Computer substituieren. Außerdem benötigt man die „Sechs Notentafeln des Würfelwalzers von Mozart“ in ausreichender Menge an Kopien.

Warum Aufgabe 1?

Diese Aufgabe bietet sich als guter Einstieg für die Aufgabenreihe Mozarts Würfelwalzer.

Aufgabe 2 Unterhaltungswert der Walzer [72, S. 209]

Zum Spielen einer Komposition eines Walzers nach Anleitung braucht ein Klavierspieler bzw. eine Klavierspielerin je nach Fähigkeit zwischen 20 und 30 Sekunden.

- a) Wie viele verschiedene Walzer sind möglich?
(Hinweis: Beachte vor allem die Möglichkeiten beim 8. und 16. Takt, also der Spalte H in der Tabelle)
- b) Wie lange würde es dauern bis alle möglichen Walzer dieser Art gespielt sind, ohne dass sich einer wiederholt?
- c) Wie lange könnte eine Gesellschaft nur mit dieser Art von Walzer unterhalten werden?

Lösung Aufgabe 2

- a) Naive Lösung: 11^{16} Möglichkeiten, da aber alle möglichen 8. und 16. Takte jeweils ident sind, muss man die Rechnung anpassen.

$$2 \cdot 11^{14} = 759\,499\,667\,166\,482 \approx 7,6 \cdot 10^{14}$$

- b) Zwischen 481 671 529 und 722 507 294 Jahren je nach Fähigkeit des Klavierspielers bzw. der Klavierspielerin.
- c) Man kann jeden Teil des Stückes natürlich einmal wiederholen und ein Musikstück somit etwas in die Länge ziehen, aber da sich die Musikstücke alle relativ ähnlich anhören, da sie alle über das gleiche Thema komponiert wurden.
Vielleicht 30 Minuten außer man wechselt es mit anderen Stücken ab.

Durchführung Aufgabe 2

Bei Aufgabe a) werden manche SchülerInnen vielleicht Fragen haben, bei Aufgabe b) kann man die SchülerInnen am besten vorher einmal schätzen lassen, um zu sehen, ob sie ein ungefähres Gefühl haben, wieviel Möglichkeiten bei so einer Wahrscheinlichkeitsaufgabe als Ergebnis herauskommen können. Bei Aufgabe c) müssen die SchülerInnen nachdenken, warum man das Stück keine 481 Millionen Jahre vorspielen kann. Dazu könnte man einfach zufällige Würfelwalzer-Kompositionen im Hintergrund laufen lassen.

Probleme Aufgabe 2

Bei Aufgabe a) müssen die SchülerInnen in der Lage sein, Noten zu lesen, bzw. zu vergleichen, um auf die richtige Lösung zu kommen.

Warum Aufgabe 2?

Durch diese Aufgabe sehen SchülerInnen, dass es zum einen nicht immer so einfach ist alle Möglichkeiten zu berechnen, vor allem wenn sie alle unterschiedlich sein sollen. Natürlich sind die Zahlen hier sehr groß und die SchülerInnen können sich nicht unbedingt etwas darunter vorstellen, aber es ist dann doch real.

Aufgabe 3 Wahrscheinlichkeit von Würfelwalzern [72, S. 209]

- a) Wie sieht der Walzer aus, wenn immer mit der wahrscheinlichsten (unwahrscheinlichsten) Augenzahl gewürfelt wird? Wie groß ist die jeweilige Wahrscheinlichkeit?
- b) Besteht eine realistische Chance, dass zwei voneinander unabhängige Personen den exakt gleichen Walzer würfeln?
- c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Walzerteil mit folgenden Taktnummern: 90, 71, 48, 29, 112, 124, 44, 151 erwürfelt wird?

Lösungen Aufgabe 3

- a) Die eigenen Kompositionen können mit Hilfe der/des MusiklehrerIn erstellt werden (ein Beispiel wäre in Abb. 33 Zwei Beispiele für Würfelmenuett und Würfelwalzer [72, S. 208] auf Seite 62 zu sehen).

Die Zahl, die am wahrscheinlichsten gewürfelt wird, ist die Zahl 7. Somit kommen folgende Takte als Ergebnis: 104, 157, 27, 167, 154, 68, 118, 91, 138, 71, 150, 29, 101, 162, 23, 151

Jeder Takt hat eine $\frac{1}{6}$ Wahrscheinlichkeit als Ergebnis zu kommen.

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{16} = \frac{1}{2821109907456} \approx 3,545 \cdot 10^{-13}$$

Die Zahlen, die am unwahrscheinlichsten gewürfelt werden, sind die Zahlen 2 und 12. Somit kommt man zu zwei verschiedenen Taktergebnissen:

(2): 96, 22, 141, 41, 105, 122, 11, 30, 70, 121, 26, 9, 112, 49, 109, 14

(12): 54, 130, 10, 103, 28, 37, 106, 5, 35, 20, 108, 92, 12, 124, 44, 131

Jeder Takt hat eine $\frac{1}{36}$ Wahrscheinlichkeit als Ergebnis zu kommen.

$$\left(\frac{1}{36}\right)^{16} = \frac{1}{79586611009946400884391936} \approx 1,26 \cdot 10^{-25}$$

- b) Die Chance besteht, die Wahrscheinlichkeit hierfür ist allerdings SEHR gering.

- c) In der Tabelle befinden sich die Takte, danach die Augenzahl, die gewürfelt wurde, und danach die dazugehörige Wahrscheinlichkeit p .

Takt	90	71	48	29	112	124	44	151
Würfel	5	7	9	7	2	12	12	7
p	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$

$$\frac{4}{36} \cdot \frac{6}{36} \cdot \frac{4}{36} \cdot \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{6}{36} = \left(\frac{1}{36}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{36}\right)^2 \left(\frac{6}{36}\right)^3 = \frac{1}{816293376} \approx 1,23 \cdot 10^{-9}$$

Durchführung Aufgabe 3

Für diese Aufgabe benötigen die Schüler wieder die Kenntnisse aus der 6. Klasse (10. Schulstufe) und können damit die Aufgaben lösen. Allerdings benötigen sie auch ein paar Notenblätter, um die Walzerkompositionen aufzuschreiben. Man kann auch besprechen, warum die Wahrscheinlichkeit bei c) größer ist als bei Aufgabe a) (nur der halbe Walzer).

Probleme Aufgabe 3

Die Ergebnisse sind sehr kleine Zahlen, somit müssen die SchülerInnen aufpassen, dass keine Rundungsfehler entstehen (was bei der heutigen Technologie allerdings kein Problem mehr darstellen sollte). Notenschreiben fällt nicht jeder/m SchülerIn leicht und muss dafür vorher in Musik auch durchgenommen werden.

Warum Aufgabe 3?

Diese Aufgabe eignet sich gut, um sie mit dem Musikunterricht zu verbinden, da die SchülerInnen zum einen Noten schreiben und zum anderen die Wahrscheinlichkeiten danach ausrechnen müssen.

5 Evaluierung der Unterrichtsstunden

5.1 Rahmenbedingungen der Schule

Die Schule, in der ich mein Unterrichtskonzept ausprobiert habe, war die Schule BG-BRG-Maria-Trapp-Platz Expositur Simonsgasse 23. Dieser Schulstandort wurde bis vor 8 Jahren als Mittelschule geführt, welche ab dem Schuljahr 2012/2013 stufenweise zu einem Gymnasium umgestellt wurde. In der Unterstufe gibt es den Modellversuch der „WienerMittelSchule“, welchen ich etwas näher erklären werde, da ich innerhalb dieses Modellversuchs meine Stunden gehalten habe. Die WienerMittelSchule ist eine Schulform, welche sowohl für Kinder mit Förderbedarf als auch für Kinder mit Hochbegabung eine Möglichkeit bietet, in einer gemeinsamen Schule zu lernen.

In den meisten Schulen müssen sich SchülerInnen schon im Alter von zehn Jahren entscheiden, ob sie ein Gymnasium oder eine Mittelschule besuchen wollen. Durch die WienerMittelSchule wird die Entscheidung um vier Jahre in die Zukunft verlegt und die SchülerInnen haben vier Jahre mehr Zeit, ihre Begabungen zu entfalten. Für die Aufnahme in eine WienerMittelSchule sind die Volksschulnoten allein kein Aufnahmekriterium, wobei dennoch auf ein ausgewogenes Verhältnis von gymnasial reifen zu nicht gymnasial reifen SchülerInnen geachtet wird.

Um die Benotung der SchülerInnen zu differenzieren, gibt es in der 2. bis 4. Klasse (6. bis 8. Schulstufe) in den Schularbeitsfächern (Mathematik, Deutsch und Englisch) zwei Beurteilungsschemata. Eines nach vertiefter Allgemeinbildung (AHS-reife) und grundlegende Allgemeinbildung (keine AHS-reife). Egal in welchem Beurteilungsschema sich eine Schülerin oder ein Schüler befindet, sie bleiben im gleichen Klassenverband und werden auch gleichzeitig unterrichtet.

Die flexiblen Leistungskurse stellen eine Möglichkeit dar, die Begabungen zu fördern. Die sogenannten Kernkurse, welche das zentrale Element des Kurssystems sind, dienen der Vermittlung des Basiswissens, während die sogenannten Erweiterungskurse hingegen den Zweck der Begabungsförderung haben. [76]

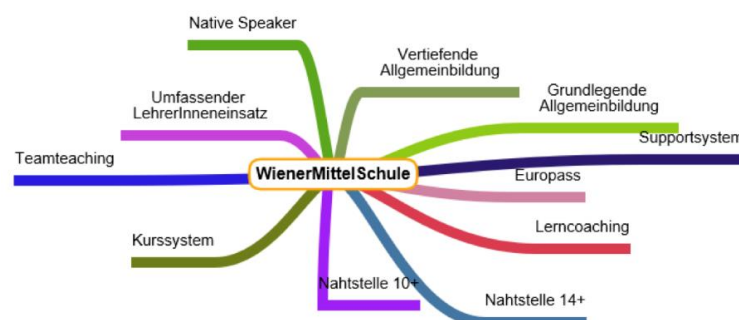


Abb. 35 WienerMittelSchule Seestadt/Simonsgasse [76]

Ich unterrichte inzwischen das dritte Schuljahr in dieser Schule. Einen besonderen Reiz stellt für mich das Unterrichten mit erfahrenen KollegInnen in der Unterstufe in den Schularbeitsfächern im Teamteaching dar. Am Anfang stellte ich es mir etwas seltsam vor, mit einem anderen Lehrenden gemeinsam in einer Klasse zu stehen, allerdings wurde ich sehr positiv überrascht und es macht vor allem in dieser Schulform auch Sinn, da die Klasse sehr breit gefächert ist, was Begabungen und Lernwillen betrifft. Für meine Unterrichtseinheiten war es sehr angenehm, zu zweit als Team für die SchülerInnen da zu sein, da somit die Fragen und Probleme schneller geklärt werden konnten. Ich habe in den beiden Klassen allerdings jeweils eine andere Kollegin, was mir für die Reflexion und Nachbearbeitung der Unterrichtseinheiten immens geholfen hat.

Das Thema meiner Unterrichtsreihe ist Musik und Bruchrechnen.

Das Ziel der Unterrichtsreihe war es, den Schülerinnen und Schülern die Verbindung zwischen Mathematik und Musik näher zu bringen, indem sie sehen, dass die Mathematik auch in so „alltäglichen“ Dingen wie der Musik steckt.

Die Voraussetzungen sind, dass die SchülerInnen Brüche addieren und subtrahieren können. Diese Unterrichtssequenz eignet sich vor allem für die 6. Schulstufe, sobald der Lehrplan das Behandeln des Themas Brüche vorsieht. Damit kann der Stoff den SchülerInnen nicht nur praxisnahe vermittelt werden, sondern auch als Übungseinheit dienen, um zum Beispiel den gemeinsamen Nenner, inkl. der Addition und Subtraktion zu üben und festigen.

Die Dauer der Unterrichtsreihe war drei Einheiten zu je 50 Minuten und das in zwei Parallelklassen.

Die Klassen waren zum einen die 2A, welche aus 25 SchülerInnen besteht, wovon 24 anwesend waren, 12 Schülerinnen und 12 Schüler. Die andere Klasse war die 2B bestehend aus 24 SchülerInnen, welche an diesem Tag auch alle anwesend waren.

Die räumlichen Ausstattungen waren etwas unterschiedlich, so befindet sich im Raum der 2A eine Schultafel und kein Beamer, im Raum der 2B ein Whiteboard, ein Beamer und ein Lautsprecher. Es gibt allerdings die Möglichkeit, einen Beamer inkl. Lautsprecher auszuliehen und in den Klassenräumen zu verwenden. Die EDV-Räume sind mit Beamer, Lautsprecher und einem Computer für jeden Lernenden ausgestattet. Die Computer haben alle nötigen Programme (GeoGebra, Audacity, etc.) installiert, um verschiedenste Versuchsreihen zu machen, welche in dieser Unterrichtsreihe nicht benötigt werden, sehr wohl aber für Unterrichtssequenzen in der Oberstufe.

5.2 Stundenplanung

Erste Unterrichtseinheit:

Takte kontrollieren und vervollständigen ($\frac{4}{4}$ Takt)

Ziele:

- Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, welche mathematische Struktur hinter den Takten steht.
- Schülerinnen und Schüler sollen besser Brüche addieren und subtrahieren können.

Uhrzeit	Inhalt	Anmerkungen
0 – 5 min	Begrüßung, Vorstellung des Themas und des Erwartungshorizonts für die nächsten zwei Stunden. Erklärung anhand des Beispiels am Arbeitsblatt 1	L-Vortrag <i>Tafel</i>
5 – 20 min	SchülerInnen arbeiten in Einzel- oder Partnerarbeit am Arbeitsblatt 1, Nummer 1 Lehrende stehen für Fragen zur Verfügung	Einzelarbeit Partnerarbeit
20 – 25 min	Vergleich der Ergebnisse und der Lösungswege	L-S-Gespräch <i>Tafel</i>
25 – 45 min	SchülerInnen bearbeiten Nummer 2 Falls sie schon vorher fertig sind, dürfen sie sich gegenseitig Takte schreiben, welcher der andere vervollständigen muss. Lehrende stehen für Fragen zur Verfügung	Einzelarbeit Partnerarbeit
45 – 50 min	Kurzes Vergleichen der Ergebnisse, Besprechung und Erklärung der verschiedenen Lösungsansätze	L-S-Gespräch <i>Tafel</i>

Zweite Unterrichtseinheit:

Takte kontrollieren und vervollständigen ($\frac{4}{4}$ und $\frac{3}{4}$ Takt, inkl. punktierter Noten)

Ziele:

- Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, welche mathematische Struktur hinter den Takten steht.
- Schülerinnen und Schüler sollen besser Brüche addieren und subtrahieren können.
- Schülerinnen und Schüler sollen Brüche um jeweils um die Hälfte vergrößern können.

Uhrzeit	Inhalt	Anmerkungen
0 – 5 min	Begrüßung, Wiederholung des Stoffes der letzten Stunde Evtl. noch letzte Beispiele von der Vorstunde besprechen Erarbeitung der punktierten Notenwerte anhand eines Beispiels.	L-Vortrag <i>Tafel</i>
5 – 20 min	SchülerInnen arbeiten in Einzel- oder Partnerarbeit am Arbeitsblatt 2, Nummer 3 Lehrende stehen für Fragen zur Verfügung	Einzelarbeit Partnerarbeit
20 – 30 min	Vergleich der Ergebnisse, wie wurden sie gelöst, welche Beispiele haben SchülerInnen selbst erfunden? Wo sind Schwierigkeiten? Gemeinsame Erarbeitung, Unterschied $\frac{4}{4}$ und $\frac{3}{4}$ Takt	L-S-Gespräch <i>Tafel</i>
30 – 45 min	SchülerInnen bearbeiten Nummer 4 Falls sie schon vorher fertig sind, dürfen sie sich gegenseitig Takte schreiben, welcher der andere vervollständigen muss. Lehrende stehen für Fragen zur Verfügung	Einzelarbeit Partnerarbeit
45 – 50 min	Kurzes Vergleichen der Ergebnisse, Besprechung und Erklärung der verschiedenen Lösungsansätze	L-S-Gespräch <i>Tafel</i>

Dritte Unterrichtseinheit:

Taktarten erkennen und Taktstriche selbst setzen.

Ziele:

- Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, welche mathematische Struktur hinter den Taktarten und Taktstrichen steht.
- Schülerinnen und Schüler sollen besser Brüche addieren und subtrahieren und diese auch kürzen können.

Uhrzeit	Inhalt	Anmerkungen
0 – 5 min	Begrüßung, Wiederholung des Stoffes der letzten Stunde Evtl. noch letzte Beispiele von der Vorstunde besprechen	L-Vortrag <i>Tafel</i>
5 – 10 min	Gemeinsames Erarbeiten der verschiedenen Taktarten Kürzen von Brüchen	L-S-Gespräch <i>Tafel</i>
10 – 25 min	SchülerInnen arbeiten in Einzel- oder Partnerarbeit am Arbeitsblatt 3, Nummer 5 Lehrende stehen für Fragen zur Verfügung	Einzelarbeit Partnerarbeit
20 – 30 min	Vergleich der Ergebnisse, wie wurden sie gelöst, welche Schwierigkeiten traten auf? WDH: Was macht einen $\frac{4}{4}$ Takt vollständig? Welche Notenwerte haben darin Platz?	L-S-Gespräch <i>Tafel</i>
30 – 45 min	SchülerInnen bearbeiten Nummer 6 Falls sie schon vorher fertig sind, dürfen sie sich gegenseitig Takte schreiben, wobei die zweite Person die Taktstriche setzen muss. Lehrende stehen für Fragen zur Verfügung	Einzelarbeit Partnerarbeit
45 – 50 min	Kurzes Vergleichen der Ergebnisse, verschiedene Herangehensweisen besprechen.	L-S-Gespräch <i>Tafel</i>

5.3 Arbeitsblätter:

Arbeitsblatt 1

Ein Musikstück besteht aus Tönen mit verschiedenen Höhen und Längen.

Heute beschäftigen wir uns mit den Tonlängen.

Es gibt folgende Notenwerte (Tonlängen):

$$\begin{aligned}
 &1 \text{ Ganze } (1 \cdot 1) \quad \circ \\
 &= 2 \text{ Halbe } \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) \quad \text{♩} \quad \text{♩} \\
 &= 4 \text{ Viertel } \left(4 \cdot \frac{1}{4}\right) \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \\
 &= 8 \text{ Achtel } \left(8 \cdot \frac{1}{8}\right) \quad \text{♪} \quad \text{♪} \quad \text{♪} \quad \text{♪} \quad \text{♪} \quad \text{♪} \quad \text{♪} \quad \text{♪} \\
 &= 16 \text{ Sechzehntel } \left(16 \cdot \frac{1}{16}\right) \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩} \quad \text{♩}
 \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen der Notenwerte haben ihren Ursprung daher, wie oft sie in einem $\frac{4}{4}$ -Takt erklingen können. Diese können auch beliebig kombiniert werden. Jede Note kann auch als Bruch angeschrieben werden und diese kann dann addiert werden, natürlich müssen sie davor auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden können.

Zum Beispiel: $\text{♩} \text{ ♩} \text{ ♩} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

1. Kontrolliere durch Rechnen, ob diese Noten jeweils einen ganzen $\frac{4}{4}$ -Takt ergeben.

$\text{♩} \text{ ♩}$	$\text{♩} \text{ ♩} \text{ ♩} \text{ ♩}$	$\text{♩} \text{ ♩} \text{ ♩} \text{ ♩} \text{ ♩}$	$\text{♩} \text{ ♩} \text{ ♩} \text{ ♩} \text{ ♩}$
_____	_____	_____	_____
$\circ$	$\text{♩} \text{ ♩} \text{ ♩} \text{ ♩} \text{ ♩}$	$\text{♩} \text{ ♩} \text{ ♩}$	$\text{♩} \text{ ♩} \text{ ♩} \text{ ♩} \text{ ♩}$
_____	_____	_____	_____

2. Ergänze auf einen vollständigen $\frac{4}{4}$ -Takt mit Notenwerten deiner Wahl und kontrolliere durch eine Rechnung.

$\text{♩} \text{ ♩} \text{ ♩} \text{ ♩}$	$\text{♩} \text{ ♩}$	$\text{♩} \text{ ♩} \text{ ♩}$	$\text{♩} \text{ ♩} \text{ ♩}$
_____	_____	_____	_____
$\text{♩} \text{ ♩}$	♩	$\text{♩} \text{ ♩} \text{ ♩}$	$\text{♩} \text{ ♩} \text{ ♩}$
_____	_____	_____	_____

Arbeitsblatt 2

Es gibt aber auch besondere Notenwerte, die sogenannten punktierten Noten.

Dabei wird ein Punkt nach der Note geschrieben, welcher den Notenwert um die Hälfte der ursprünglichen Länge verlängert.

$$\begin{aligned} \text{Punktierte Halbe} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} & \text{♩.} &= \text{♩} + \text{♩} \\ \text{Punktierte Viertel} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} & \text{♩.} &= \text{♩} + \text{♩} \\ \text{Punktierte Achtel} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} & \text{♩.} &= \text{♩} + \text{♩} \end{aligned}$$

3. Ergänze auf einen vollständigen $\frac{4}{4}$ -Takt mithilfe von dir soeben gelernten Notenwerten.
Erfinde in der dritten Zeile selbst Takte und kontrolliere durch eine Rechnung.

Natürlich gibt es nicht nur einen $\frac{4}{4}$ -Takt, sondern auch einen $\frac{3}{4}$ -Takt, das heißt es passen genau 3 Viertel Noten in einen Takt.

4. Ergänze nun auf einen $\frac{3}{4}$ -Takt. Erfinde in der dritten Zeile selbst Takte und kontrolliere durch eine Rechnung.

Arbeitsblatt 3

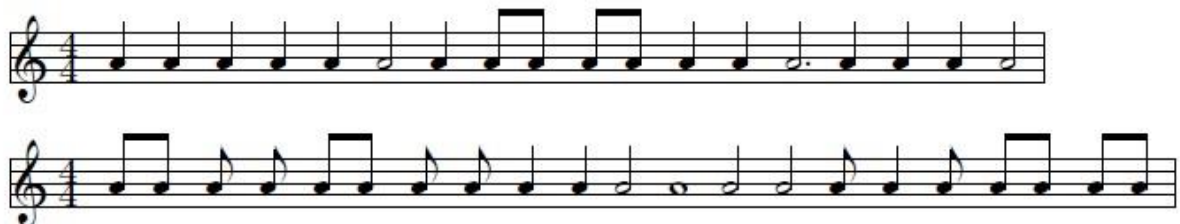
Neben dem schon bekannten $\frac{4}{4}$ Takt und dem $\frac{3}{4}$ Takt gibt es noch andere Taktarten. Diese findet man heraus, indem man sich alle Notenwerte, die in einen Takt gehören, ansieht und sich überlegt, unter welchem gemeinsamen Nenner man diese zusammenfassen kann.

Vergleiche am besten mit den vorherigen Arbeitsblättern, was macht einen $\frac{4}{4}$ oder $\frac{3}{4}$ Takt aus?

5. Es kann schon einmal passieren, dass einem Komponisten die Taktart nicht mehr einfällt, bitte hilf ihm, die richtige Taktart zu finden.

a) 	b) 
c) 	d) 
e) 	f) 
g) 	h) 

6. Einem anderen Komponisten sind die Taktstriche ausgegangen, wie könnte man ihm da nur helfen? Setze die Taktstriche dorthin, wo sie für diese Taktart hinpassen.



5.4 Durchführung der Unterrichtseinheiten (2A)

Stoffbedingt begann ich mit der 2A und hielt innerhalb einer Woche (Montag bis Mittwoch) die Unterrichtseinheiten. Die 2B war erst in der Woche darauf dran (Dienstag bis Donnerstag). Dies half mir, die Stundenbilder noch einmal zu überdenken und Erklärungsdefizite auszubessern. Außerdem experimentierte ich mit Begleitmusik. In der Klasse 2A ließ ich keine Begleitmusik im Hintergrund laufen, in der 2B allerdings schon. Zu den Auswirkungen davon komme ich später in der Reflexion.

Meine Kollegin, die mit mir die Klasse in Mathematik hat, unterrichtet die Fächer, Mathematik, geometrisch Zeichnen und Informatik. Auf ihre Bitte hin wird sie in meiner Arbeit nur als Kollegin A angeführt.

Unterrichtseinheit 1 (2A)

Zu Beginn der ersten Stunde war es etwas unruhig in der Klasse, da es noch Fragen zur Hausübung der letzten Einheit gab, dies war aber zum Glück innerhalb von ca. zwei Minuten geklärt, und nachdem ich die Hausübungen absammeln ließ und die Anwesenheit kontrolliert hatte, konnte ich mit der eigentlichen Einheit anfangen, die auf Grund von administrativen Tätigkeiten leider um 5 Minuten später als geplant begann.

Die Aufmerksamkeit der SchülerInnen hatte ich danach recht schnell im Griff, indem ich ihnen erklärte, was in den nächsten drei Unterrichtseinheiten auf sie zukommen würde.

Anhand eines L-S-Gesprächs (LehrerInnen-SchülerInnen-Gespräch) fanden wir heraus, dass die SchülerInnen letzte Woche schon im Musikunterricht das Thema Notenwerte behandelt hatten. Eingangs stellte ich den Lernenden die Frage, was Notenwerte mit Mathematik zu tun haben könnten. Nach einiger Überlegung meldete sich dann eine Schülerin zu Wort und sagte, dass die Namen der Noten ja Brüche seien. Nach dieser Aussage bat ich zwei Freiwillige, das Arbeitsblatt 1 (siehe Seite 74) auszuteilen.

Anhand des Beispiels, das auf dem Arbeitsblatt zu sehen ist,

$$\text{♩} \text{♩} \text{♩} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

wiederholten wir gemeinsam die Addition der Brüche und übertrugen dieses Wissen auf die Notenwerte.

Danach durften die SchülerInnen in Einzel- oder Partnerarbeit die Aufgabe 1 erledigen. Meine Kollegin A und ich gingen währenddessen durch die Klasse und halfen einzelnen Lernenden bei Fragen. Mit den ersten paar Beispielen waren die meisten SchülerInnen schnell fertig, allerdings hingen sie dann bei der letzten Aufgabe. Nachdem bei der letzten Aufgabe ein paar SchülerInnen Schwierigkeiten hatten, bat ich dann um Aufmerksamkeit und wir korrigierten die Aufgaben nach

der Reihe gemeinsam an der Tafel. Die letzte Aufgabe wurde dann genauer erklärt, weil es durch die Sechzehntelnote zu Verwirrungen kam. Durch die Bruchschreibweise konnten die anfänglichen Verständnisprobleme schnell gelöst werden.

Sehr viel mehr Interesse hatten die SchülerInnen an der Aufgabe 2, da sie gleich beim Lesen erfassten, worum es ging. Dennoch entschied ich mich dazu, mit den Lernenden die erste Nummer gemeinsam an der Tafel zu rechnen. Danach durften sie wieder allein oder zu zweit arbeiten.

Da in dieser Phase wenige Fragen auftauchten, blieben meine Kollegin A und ich vorne sitzen und besprachen, was man in der anderen Klasse noch besser erklären könnte, dazu komme ich aber später noch genauer. Zirka neun Minuten vor dem Läuten merkte ich, dass ein paar SchülerInnen schon fertig waren und trug ihnen daher auf, sich zu zweit oder zu dritt zusammen zu schließen und sich gegenseitig im Schulübungsheft $\frac{4}{4}$ Takte aufzuschreiben und einander gegenseitig zu überprüfen, welche Notenwerte fehlen können.

Fünf Minuten vor Schluss bat ich alle wieder um Aufmerksamkeit und wir verglichen die Aufgaben einzeln an der Tafel, wobei wir die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten auch besprachen.

Nachdem am Ende noch eine Minute über war, bat ich einen Schüler, an die Tafel zu kommen und eines seiner Beispiele an die Tafel zu schreiben. Diese Aufgabe lösten wir dann mit der Klasse gemeinsam. Zum Läuten erinnerte ich die SchülerInnen noch einmal daran, die Blätter in die Mappe zu geben, da sie die Blätter vielleicht die nächsten Stunden wieder brauchen würden.

Unterrichtseinheit 2 (2A)

Zu Beginn der zweiten Einheit in der 2A wiederholten wir kurz, was in der letzten Stunde Neues gelernt wurde. Da wir mit dem Korrigieren in der vorherigen Einheit fertig geworden waren, fragte ich nach der Wiederholung nach, ob jemand noch weitere Notenwerte kenne. Der Frage folgte leider nur Schweigen, woraufhin ich die Klasse fragte, ob es eine Note gäbe, die genau drei Viertelschläge lang klinge. Eine Antwort wusste auch hier keiner, aber die SchülerInnen stimmten mir zu, dass es so etwas sicher geben müsse. Ich erklärte in Folge die punktierten Noten und ließ auch anklingen, dass es auch mehrfach punktierte Noten gibt, erklärte sie aber (absichtlich) nicht weiter. Nachdem ich gemeinsam mit den SchülerInnen ein Beispiel an der Tafel erarbeite hatte, teilten meine Kollegin A und ich die Arbeitsblätter rasch aus und die Lernenden begannen mit Aufgabe 3. Hier mussten sie auf einen vollen $\frac{4}{4}$ Takt ergänzen, ähnlich wie am Tag davor, allerdings nun mit punktierten Noten. Außerdem durften sie selbstständig bis zu vier Aufgaben selbst erfinden und mit der Banknachbarin bzw. dem Banknachbarn austesten.

Nachdem die SchülerInnen Probleme mit den punktierten Noten hatten, gingen meine Kollegin A und ich von einem Tisch zum nächsten und erklärten es den einzelnen noch einmal. Ein nochmaliges allgemeines Erklären wäre zu diesem Zeitpunkt wohl effektiver gewesen, aber nachdem die SchülerInnen immer nur nach der Reihe aufgezeigt hatten, übersah ich leider den Zeitpunkt dafür.

Durch das ständige Erklären übersah ich dann die Zeit und verglich erst etwas später als geplant. Die Ansätze der Lernenden für die letzten vier Aufgaben waren teils sehr kreativ, teils wurden die Aufgaben vom vorherigen Tag herangezogen.

Nach dem Vergleichen wollten die SchülerInnen gleich eigenständig mit der Aufgabe 4 beginnen, allerdings überlasen sie die Angabe und in Folge füllten drei Schüler die erste Aufgabe falsch aus. Ich reagierte auf diese Situation mit dem Hinweis, dass es zwar kein Problem sei, schneller zu arbeiten, man aber doch die Angabe lesen solle und, wenn man sich nicht auskenne, bitte nachfragen oder kurz warten solle, bis es für alle erklärt werde. Die Erklärung, was ein $\frac{3}{4}$ Takt sei, klärte ich anhand eines Walzertaktes, welcher zu meinem Erstaunen nicht jedem ein Begriff war. Nachdem die Kinder dann verstanden hatten, was der Unterschied zwischen den zwei Taktarten ist, durften sie mit Aufgabe 4 beginnen.

Gleich zu Beginn der Arbeitszeit wies mich meine Kollegin A, mit der ich die Stundenplanung besprochen hatte, darauf hin, dass wir etwa 10 Minuten im Verzug waren. Daraufhin beschloss ich, den SchülerInnen die restliche Stunde, also die letzten 10 Minuten, für die Lösung der Aufgabe 4 zur Verfügung zu stellen. Ich bat sie, sich bei etwaigen Fragen zu melden. Der Rest sei als Hausübung bis zum nächsten Tag fertig zu stellen.

Im Zuge der Verkündung der Hausübung beschwerten sich ein paar Burschen, dass sie das nicht verstehen würden und daheim sicher nicht schaffen könnten. Daraufhin holte ich besagte Burschen zu mir und erklärte ihnen die Thematik nochmal, worauf sie zustimmend nickten und sich die letzten fünf Minuten nochmal hinsetzten und bis zum Läuten brav arbeiteten. Meine Kollegin A war währenddessen so nett und betreute die restlichen SchülerInnen.

Beim Läuten waren dann erstaunlich viele Kinder schon fertig. Was eine Hausübung an Motivation geben kann, wundert mich immer wieder.

Unterrichtseinheit 3 (2A)

Die dritte und letzte Einheit der 2A begann ziemlich chaotisch, da es in der Pause davor einen Streit zwischen zwei Mädchengruppen gegeben hatte, welche nun mit den Peer-MediatorInnen der Schule, welche aus OberstufenschülerInnen besteht, am Gang saßen und die Situation besprachen. Nach einem kurzen Wortwechsel mit der Peer-MediatorInnen wurde ausgemacht, dass sie den Konflikt jetzt noch besprechen und die Mädchen in ca. zehn Minuten in die Klasse schicken würden.

In der Klasse angekommen beruhigte ich die restliche Klasse einmal und gab ihnen zu verstehen, dass der Unterricht begonnen habe und die Mädchen in Kürze zurückkommen würden. Zwei Schüler wollten mich darüber informieren, was vorgefallen war, aber nach einem klaren „Ich habe es schon in der Pause mitbekommen.“, waren auch die beiden ruhig und ich konnte die eigentliche Stunde starten. Ich bat meine Kollegin A am Anfang noch kurz raus zu schauen, ob alles in Ordnung sei, bzw. um die Klassenvorständin über den Vorfall zu informieren.

In der Zwischenzeit bat ich die SchülerInnen, ihr Arbeitsblatt von letzter Stunde auf den Tisch zu legen, damit wir es gemeinsam kontrollieren könnten. Abgesehen von zwei Schülern, die ihren Zettel nicht mehr finden konnten und einer Schülerin, die ihren Zettel zuhause nicht fertig gestellt hatte, hatten alle ganz passable Ideen für die letzte, frei zu erfindende, Zeile.

Nach dem Vergleich der ersten zwei Zeilen, bzw. ein paar Vorschlägen für die dritte Zeile, begann ich mit dem eigentlichen Thema der Stunde, Taktarten und Taktstriche. Auf meine Frage hin, ob jemand eine andere Taktart außer dem $\frac{4}{4}$ und $\frac{3}{4}$ Takt kenne, kam sogar eine Antwort, der $\frac{2}{2}$ oder auch ein $\frac{3}{8}$ Takt. Ein gemeinsames Erarbeiten von verschiedenen Taktarten stellte sich als relativ einfach heraus. Gerade als ich mit dem Erklären fertig war, kamen die sechs Mädchen wieder in die Klasse, die zuvor bei der Peer-Mediation gewesen waren. Ich gab einem Schüler in der ersten Reihe die Arbeitsblätter zum Austeilen und teilte den SchülerInnen mit, sie sollen bitte Aufgabe 5. anfangen. Während die Lernenden über dem Arbeitsblatt brüteten, holte ich mir die sechs Schülerinnen zu mir vor, kontrollierte, ob sie ihre Hausübung gemacht hatten und erklärte ihnen die Taktarten. Danach widmete ich mich wieder dem Unterstützen der SchülerInnen, die den Eindruck erweckten, Hilfe zu benötigen.

Nachdem ich das Gefühl hatte, dass die meisten fertig waren und sich schon langweilten, schrieb ich ihnen noch schnell zwei Takte an die Tafel, welche etwas schwieriger waren, da sie wieder punktierte Noten enthielten, um sie zu beschäftigen. Ein paar Minuten später waren dann alle fertig, worauf ich um Aufmerksamkeit bat und mit den Kindern gemeinsam die Ergebnisse verglich.

Nach der Korrektur wies ich die Lernenden an, sich die Angabe von Aufgabe 6 durchzulesen. Auf die Frage hin, ob sie die Angabe verstanden hätten, wurde nur genickt und ich ließ sie anfangen. Nachdem ich innerhalb der ersten Minute drei oder vier Leuten die Aufgabe nochmal erklären musste, entschloss ich mich dazu, die Aufgabe für alle SchülerInnen noch einmal zu erklären und sie etwas zu rügen, dass es keine Schande sei, wenn man eine Angabe nicht verstehe und ich nicht in ihre Köpfe schauen könne, um zu wissen, ob sie es verstehen würden. Nach meiner Erklärung funktionierte die Aufgabe dann recht gut.

Kurz vor Schluss der Stunde bat ich die SchülerInnen den Namen auf das Arbeitsblatt 3 zu schreiben, damit ich mir die Lösung zuhause in Ruhe anschauen könne. Zum Läuten hin hatte ich dann endlich alle Zettel und bedankte mich noch für die nette Unterrichtsreihe.

Nachtrag Unterrichtseinheiten (2A)

Die abgesammelten Arbeitsblätter der SchülerInnen brachten gute Ergebnisse, auch wenn sich ein paar kleine Fehler eingeschlichen hatten. Ich machte in der nächsten Einheit am Donnerstag zu Beginn der Stunde eine kurze Feedbackrunde zur Unterrichtsreihe, aber mehr dazu später.

5.5 Durchführung der Unterrichtseinheiten (2B)

Eine Woche nach der 2A hielt ich die gleichen Unterrichtseinheiten mit der 2B. Wie schon vorher erwähnt, habe ich in dieser Klasse eine andere Kollegin, die neben Mathematik auch Physik unterrichtet. Auch diese Kollegin möchte nur als Kollegin B in der Arbeit erwähnt werden.

Außerdem versuchte ich in dieser Klasse im Hintergrund klassische Musik über die Lautsprecher abzuspielen. Dafür stellte ich mir eine Playlist mit ruhiger klassischer Musik zusammen und ließ sie über den Computer laufen.

Der Grund, warum ich die Musik nur in der 2B abgespielt habe, ist folgender: Die Klasse ist im Normalfall lauter und unruhiger bei Einzel-, Partner- und Gruppenarbeiten und ich wollte herausfinden, ob ruhige Musik eine Auswirkung auf den Lärmpegel in der Klasse hat.

Unterrichtseinheit 1 (2B)

Ähnlich wie in der 2A fing ich die Unterrichtseinheit damit an, dass ich die Klasse zur Ruhe brachte und ihnen erklärte, was in den nächsten drei Einheiten auf sie zukommen werde. Außerdem erklärte ich ihnen, dass ich gerne klassische Musik im Hintergrund abspielen wollte, damit es nicht so eine sterile Lernumgebung sei, worauf hin die SchülerInnen sich aufregten, dass sie keine klassische Musik mögen. Auf meinen Einwand, dass die Musik eh nur solange laufen würde, solange es ruhig sei, waren sie aber schnell ruhig und hörten zu.

Auch diese Klasse hatte in Musik schon von Notenwerten gehört und konnte mir gleich ein paar Notenwerte aufsagen. Bei der Gestalt der einzelnen Noten gab es paar Differenzen zwischen den Lernenden, aber im Großen und Ganzen war das Richtige schon dabei. Auf meine Frage, was die Notenwerte mit Mathematik zu tun haben könnten, wussten sie keine Antwort, aber durch den Hinweis, sie sollten sich einmal die Namen der Noten in Erinnerung rufen, kam relativ schnell die Idee der Brüche. Ich ließ die Arbeitsblätter austeilen und erklärte ihnen, wie man mit den Notenwerten rechnen kann. Durch das Beispiel auf dem Arbeitsblatt hatten sie auch gleich eine Idee, was sie bei den Aufgaben machen sollten.

Während der folgenden Einzel- und Partnerarbeit ließ ich dann die Musik laufen und es war erstaunlich ruhig. Sogar die SchülerInnen, die bei selbständigen Arbeiten im Normalfall nur wenig bis gar nichts machen, arbeiteten fleißig. Dies führte dazu, dass ich früher fertig wurde als erwartet. Für den gemeinsamen Teil drehte ich die Musik leiser, was signalisierte, dass die Aufmerksamkeit nach vorne gerichtet werden sollte. Beim Vergleich der Ergebnisse wurde recht schnell klar, dass die letzte Nummer auch in dieser Klasse zu Problemen geführt hatte. Durch denselben Hinweis wie schon in der 2A, löste auch hier sich das Problem in Luft auf.

In einem L-S-Gespräch wurde erarbeitet, was zu beachten ist, wenn man einen vollen $\frac{4}{4}$ Takt haben will. Danach durften die Kinder in Begleitung von Musik weiterarbeiten. Der zweite Teil des

selbstständigen Arbeitens funktionierte nicht mehr ganz so gut, da sich einige SchülerInnen, genau die, die gesagt hatten, dass sie keine klassische Musik mochten, sich nun von der Musik ablenken ließen. Nach einer Ermahnung und der Androhung, die Musik abzdrehen, arbeiteten auch diese Kinder weiter. Fragen gab es erstaunlich wenige, allerdings war die Geschwindigkeit, in der sie die Aufgaben erledigten, sehr unterschiedlich. Ein paar waren 15 Minuten vor Unterrichtsende schon mit den Aufgaben fertig, andere hatten noch nicht einmal die Hälfte. Den schnelleren erteilte ich den Auftrag, sich gegenseitig Aufgaben auszudenken und sie einander zu stellen.

Fünf Minuten vor Unterrichtsende drehte ich die Musik leiser und verglich mit den SchülerInnen die Ergebnisse. Nachdem noch Zeit über war, ließ ich ein paar Kinder am Whiteboard ihre Aufgaben präsentieren und gemeinsam mit der Klasse lösen.

Kurz vor dem Läuten gab ich auch in dieser Klasse die Erinnerung, den Zettel in die Mappe zu geben, da wir ihn die nächsten Tage noch brauchen würden.

Unterrichtseinheit 2 (2B)

Am Beginn der zweiten Einheit wiederholte ich den Stoff der letzten Stunde, um die SchülerInnen von der Pause abzuholen. So wie in der 2A fragte ich, ob jemand noch andere Notenwerte kenne, im Gegensatz zur Woche davor bekam ich eine richtige Antwort. Eine Schülerin erklärte, was eine punktierte Note ist, mit dem Zusatz, dass sie selbst ein Instrument spiele. Ich klärte dann nur mehr über den mathematischen Hintergrund auf, also dass sie um die Hälfte länger als die ursprüngliche Note ist. In dieser Klasse erwähnte ich nicht, dass es auch mehrfach punktierte Noten gibt, allerdings zeigte ich die punktierte Note auch mit einem Beispieltakt, da es in der anderen Klasse damit Probleme gegeben hatte. Während dem Austeilen des Arbeitsblattes stellte ich im Hintergrund schon die Musik ein.

In der freien Arbeitszeit teilten sich meine Kollegin B und ich auf und gingen durch die Reihen der Klasse und halfen bei Fragen den SchülerInnen. Die Arbeitsmoral der Klasse war sehr gut und sie kamen gut voran.

Beim späteren Vergleich der Ergebnisse waren viele einfache, aber auch mehrere komplizierte Lösungen dabei, die zusätzliche Erläuterung benötigten. Bei der gemeinsamen Erarbeitung des $\frac{3}{4}$ Taktes waren die SchülerInnen sehr bemüht mitzuarbeiten und nach ein paar Minuten durften sie wieder zu klassischer Musik arbeiten.

Der zweite Teil der Unterrichtseinheit verlief ohne gröbere Vorkommnisse, meine Kollegin B musste zwar kurzzeitig das Klassenzimmer verlassen, da sie von einer anderen Kollegin geholt wurde, auf Grunde eines Vorfalls in ihrer Klasse, aber sie war in einigen Minuten wieder da. Da die Kinder sehr schnell beim Berechnen der Takte waren, beschloss ich, etwas früher abubrechen und mit ihnen gemeinsam die letzten Minuten die Ergebnisse zu vergleichen und über die Schwierigkeiten der Aufgaben zu reden. Eine Schülerin gab dann eine selbsterstellte Aufgabe zu einem

$\frac{3}{4}$ Takt, das von den anderen Schülern nicht so leicht verstanden wurde, da es mehrere punktierte Sechzehntelnoten enthielt und somit relativ lange wurde. Beim Läuten waren wir aber auch mit dieser Nummer fertig.

Unterrichtseinheit 3 (2B)

Die dritte Unterrichtseinheit eröffnete ich mit einer kurzen mündlichen Wiederholung über die schon bekannten Notenwerte und der Erläuterung, was einen Takt ausmacht. Im Hinblick auf das Thema der Stunde war das auch eine ganz gute Idee, allerdings wussten die SchülerInnen nicht mehr, was einen Takt ausmacht. Mit einer kleinen Hilfestellung war aber auch diese Hürde überstanden. Ich fragte die Klasse dann, welche Taktarten sie außer den schon bekannten noch kennen. In dieser Klasse gab es darauf leider keine Antwort, woraufhin ich ihnen dann erklärte, dass eine Taktart immer als Bruch dargestellt wird und es um die Anzahl der Noten zu den Notenwerten geht. Durch ein geleitetes Gespräch gelang es den SchülerInnen auf eine gute Definition zu kommen. Ich teilte die Arbeitsblätter darauf hin selbst aus und gab die Anweisung, mit der Aufgabe 5 zu beginnen. Danach drehte ich die Musik wieder auf und ließ die Lernenden arbeiten. Ein paar Schüler hatten Fragen, ob sie richtige Antworten hätten, was meistens der Fall war.

Nach dem Vergleich der Aufgaben fragte ich die SchülerInnen noch einmal, was einen Takt ausmacht. Dieses Mal wussten sie noch die Antwort und somit konnten wir die Problemstellung von Aufgabe 6 gemeinsam erklären und sie durften danach wieder weiterarbeiten.

Gegen Ende der Stunde forderte ich die Kinder auf, ihre Namen auf die Zettel zu schreiben und sie abzusammeln, da ich mir die letzte Aufgabe gerne selbst anschauen würde, da es mündlich etwas umständlich sei. Zum Läuten bedankte ich mich noch für die erfolgreiche Unterrichtsreihe und entließ die SchülerInnen in die Pause.

Nachtrag Unterrichtseinheiten (2B)

Die Arbeitsblätter der letzten Einheit waren fast fehlerfrei und wurden in der darauffolgenden Mathematikstunde zurückgegeben. Das Feedback wurde auch in jener Stunde eingeholt, aber mehr zum Feedback im nächsten Kapitel.

5.6 Feedback der Unterrichtsreihe

Ich teilte jeder Schülerin, bzw. jedem Schüler in der Einheit nach der letzten Stunde ein DIN A5 Blatt aus, wo sie nach der Methode von „Plus – Minus – Fragezeichen“, in drei Spalten Feedback gaben. Die positiven Erfahrungen werden in die erste Spalte eingetragen, Kritik in die zweite und Verbesserungsvorschläge in die letzte. Diese Zettel sollten anonym bleiben, doch leider hatten man-

che SchülerInnen die Namen schon drauf geschrieben, was aber das Feedback nicht weniger sinnvoll macht. Ich führte dann noch mit der Klasse ein offenes Gespräch über Verbesserungsvorschläge.

Feedback SchülerInnen (2A)

Das Feedback in der 2A fiel gemischt aus. Ein Großteil der Klasse schrieb in der ersten Spalte Kommentare wie: „Super“, „sehr gut“, „sollten wir öfters machen“. In der zweiten Spalte wurde meist über die Zeit gesprochen: „zu langsam“, „zu schnell“, „bin nicht mitgekommen“. Bei den Verbesserungsvorschlägen trauten sich nur sehr wenige SchülerInnen, etwas hinzuschreiben, die einzigen zwei Meldungen auf den Zetteln waren: „punktierte Noten nicht verstanden“ und „schwierigere Beispiele“.

In der offenen Runde nahm ich mir noch zirka 10 Minuten Zeit, um mit den Kindern zu besprechen, wie es ihnen so ergangen war. Ein paar SchülerInnen saßen bei diesem Gespräch eher ruhig da und banden sich nicht ein, der Großteil beteiligte sich aber. Die Inhalte der Gespräche spiegeln sich aber schon in den Kommentaren auf den Feedbackzetteln wider. Die einzige Ergänzung ist, dass sie gerne öfter fächerübergreifenden Unterricht hätten.

Feedback SchülerInnen (2B)

In der 2B lief das Feedback sehr ähnlich ab wie in der 2A. Allerdings stand auf den Feedbackzetteln bei fast allen Lernenden, dass sie gerne bei Arbeitsaufträgen immer Musik hören möchten. Teilweise stand „mit Kopfhörern Musik hören“, was allerdings durch das Handyverbot in der Schule nur schwer möglich ist. In dieser Klasse war der Konsens des Feedbacks sehr positiv mit nur wenig Kritikpunkten. Im offenen Gespräch wurde recht schnell klar, dass auch sie gerne öfter Unterrichtsreihen hätten, die Mathematik mit anderen Fächern verbindet, da sie hier zumindest etwas das Gefühl hatten, dass die Mathematik auch einen Zweck hat.

Feedback Kolleginnen

Das Feedback mit meinen beiden Kolleginnen fand gemeinsam nach der letzten Einheit in der 2B im Lehrerzimmer statt. Meine Kolleginnen waren von der Unterrichtsreihe durchaus positiv überrascht. Kollegin A merkte an, dass es manchmal besser ist, eine Aufgabe noch einmal für alle SchülerInnen, anstatt für einzelne zu erklären. Allerdings waren wir uns beide darüber einig, dass manche SchülerInnen bei allgemeinen Erklärungen auf Durchzug schalten und nur bei einer persönlichen Erklärung aufpassen. Kollegin B war, so wie ich, fasziniert, dass die 2B trotz, bzw. durch die Begleitmusik ruhiger und produktiver war als bei allen anderen Eigenarbeiten bisher. Kollegin A merkte an, sie wolle so etwas in der 2A auch einmal ausprobieren.

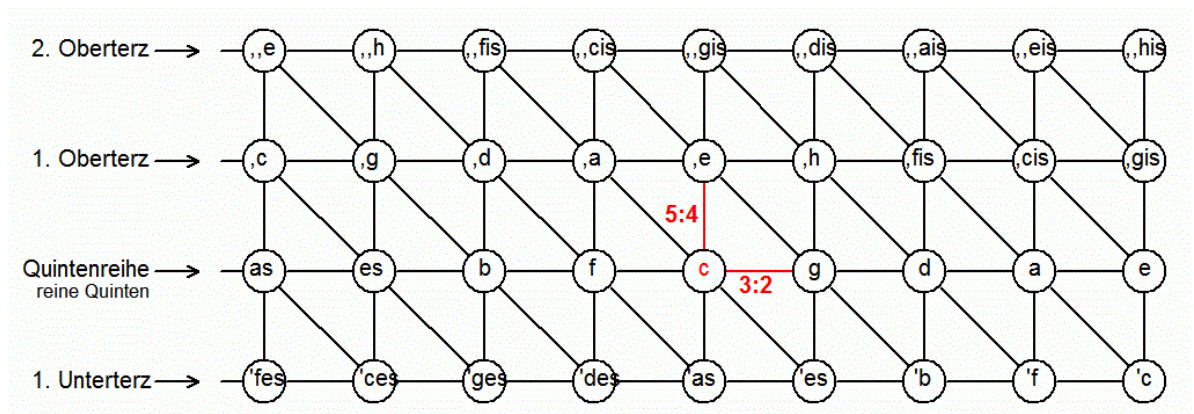
Ein Kritikpunkt von beiden Kolleginnen war, dass ich bei den Arbeitsblättern mehr auf die Differenzierung innerhalb der Klasse schauen muss. Sie gaben mir als Vorschlag, für jede Nummer mehr Aufgaben, also mindestens doppelt so viele zu erstellen und diese dafür in drei Schwierigkeitsstufen zu unterteilen. Dann könnten die besseren SchülerInnen die schwierigeren Aufgaben und die nicht so guten die leichteren oder mittleren Aufgaben machen. Natürlich würden dann nicht alle Lernenden mit allen Aufgaben fertig werden, aber der Rest könnte ja als eine (freiwillige) Hausübung oder ein Übungsblatt dienen.

5.7 Weitere geplante Arbeitsblätter

Ich habe im Laufe meiner Diplomarbeit mehrere Aufgaben gesammelt, sowohl von anderen Autoren als auch selbst erstellt. Diese möchte ich in diesem Kapitel gerne im Zuge von Arbeitsblättern vorstellen. In weiterer Folge bat ich meine KollegInnen mir ein Feedback auf die Arbeitsblätter zu geben, welches im Kapitel Experteninterviews dann wiedergegeben wird.

Arbeitsblätter Euler'sches Netz

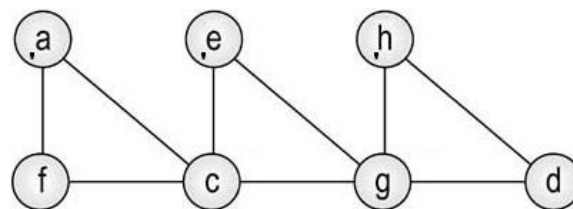
Das Euler'sche Netz bietet eine Möglichkeit, die Intervalle zwischen verschiedenen Tönen in einer reinen Stimmung zu veranschaulichen. Die Schreibweise von Leonhard Euler (einem bekannten Mathematiker aus dem 18. Jahrhundert) gibt an, um wie viele syntonische Komma ein Ton verschoben werden muss, damit das Intervall richtig ist. Die Abbildung zeigt das Beziehungsgeflecht der reinen Stimmung. Zu sehen sind Quintenreihen, die sich nur um das syntonische Komma unterscheiden. Vertikal sind es Terzschritte und horizontal sind es Quintenschritte.



Quelle: Wikipedia

Die Eulerschreibweise, 'x („Tiefkomma x “) und ,,x („Hochkomma x “) bedeutet, dass dieser Ton um ein syntonisches Komma (Abweichung von ca. 21,5 % eines Halbtonschrittes) tiefer oder höher als der Ursprungston sein muss.

Mit Hilfe des Euler'schen Netzes kann man sich alle Dur-Tonleitern ablesen, in der nächsten Abbildung sieht man die Töne der C-Dur-Tonleiter in Eulerschreibweise:



Quelle: Wikipedia

Aufgabe 1

- a) Schreibe die *C*-Dur-Tonleiter in richtiger Reihenfolge in Eulerschreibweise auf.
- b) Erkläre das Schema in eigenen Worten.
- c) Versuche das Schema auch auf andere Dur-Tonleitern zu übertragen.
Wie würde zum Beispiel die *F*-Dur, bzw. die *Es*-Dur aussehen.
- d) Überlege, was zu beachten wäre, wenn du ein Schema für Moll-Tonleitern zu „entwickeln“ hättest.

Das Euler'sche Tonnetz bietet eine schöne Rechenmöglichkeit, um die einzelnen Intervalle zwischen Tönen auszurechnen. Wenn von einem Ton aus horizontal nach rechts gegangen wird, wird mit der Zahl $\frac{3}{2}$ multipliziert, wenn nach links, also runter, gegangen wird, muss man durch die Zahl $\frac{3}{2}$ dividieren. Ähnlich verhält es sich, wenn man sich vertikal bewegt, hier handelt es sich nach oben um eine Multiplikation mit der Zahl $\frac{5}{4}$, nach unten um eine Division mit derselben Zahl. Zu beachten ist, dass es sich immer noch um Quinten und Terzen handelt, also muss immer wieder einmal am Ende mit der Zahl $\frac{2}{1}$ dividiert oder multipliziert werden, um die Oktavenunterschiede weg zu rechnen.

Hinweis: Innerhalb einer Oktave darf das Verhältnis nicht größer als $\frac{2}{1}$ sein und, solange das Intervall von einem niedrigeren Ton auf einen höheren geht, darf das Verhältnis nicht kleiner als 1 sein.

Aufgabe 2

- a) Erstelle eine Tabelle mit der *C*-Dur und berechne die Intervalle zwischen den einzelnen Tönen mit dieser Methode.
- b) Ergänze die Frequenzen der Töne, wenn $a \cong 220 \text{ Hz}$.

Berechne die folgenden Intervalle zwischen den Tönen. (Achte auf die „Komma“)

- c) $c - , a$ (entspricht einer Diagonale, nach links oben)
- d) $e - f$
- e) $d - , , gis$
- f) $, d - 'b$
- g) $'des - , c$

Anleitung

- 1) Die grossen Buchstaben A bis H, welche über den 8 Columnen der Zahlentafeln stehen, zeigen die 8 Takte eines jeden Theils des Walzers an, z.B. A den ersten, B den zweiten, C den dritten u.s.w. und die Zahlen in der Colonne darunter zeigen die Nummer des Taktes in den Noten.
- 2) Die Zahlen von 2 bis 12 geben die Summe der Zahlen, welche man mit zwei Würfel werfen kann.
- 3) Man wirft also z.B. für den ersten Tackt des ersten Theils des Walzers mit zwei Würfeln 6 und sucht neben der Zahl 6 in der Colonne A die Nummer des Taktes 148 in der Musiktafel. Diesen Takt schreibt man aus und hat den Anfang des Walzers. Nun wirft man für den zweiten Takt z.B. 9 und sucht neben 9 unter B und findet 84 in der Musiktafel. Diesen Tackt schreibt man nun zum ersten und so fährt man fort, bis man nach 8 Würfeln den ersten Theil des Walzers fertig hat. Dann setzt man das Repetitionszeichen und geht zum zweiten Theile über. Will man einen längern Walzer haben, so fängt man noch einmal von vorne an und so gehts ins Unendliche fort.

Quelle: Stochastik und Musik: Grundideen der Stochastischen Musik im Unterricht

1. Walzerteil

Takt → Augensumme ↓	A	B	C	D	E	F	G	H
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

2. Walzerteil

Takt → Augensumme ↓	A	B	C	D	E	F	G	H
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	179	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Quelle: Der Würfel als Autor. Würfelmusik und Zufallstexte des 17.–19. Jahrhunderts

Notentabelle zu den Würfelwalzern (Mozart?)

The musical score is presented in two columns, each containing five systems of music. The notation is in 3/4 time and features a mix of treble and bass staves. Measure numbers are indicated below the staves, and some measures are labeled with letters (e.g., 5a, 5b, 24a, 24b). The score is titled 'Notentabelle zu den Würfelwalzern (Mozart?)'.

Measures 1 to 27 are shown in the first column, and measures 28 to 123 are shown in the second column. The notation includes various musical symbols such as notes, rests, and bar lines.

The image displays two musical score excerpts, each consisting of a system of two staves (treble and bass clef). The left excerpt contains measures 123 through 159, featuring a mix of staccato and legato passages. The right excerpt contains measures 160 through 176, primarily consisting of staccato passages. Measure numbers are printed below the first staff of each system.

Quelle: Stochastik und Musik: Grundideen der Stochastischen Musik im Unterricht (im Arbeitsblatt je zwei Bilder quer auf einer Seite)

Aufgabe 1 Erste Erfahrungen mit dem gewürfelten Walzer

Nehmt zu zweit ein Notenblatt und zwei Würfel und komponiert zwei Walzer nach der Anleitung. Wenn ihr fertig seid, bittet die Lehrperson, den Walzer vorzuspielen und vergleicht die beiden Stücke.

Aufgabe 2 Unterhaltungswert der Walzer

Zum Spielen einer Komposition eines Walzers nach Anleitung braucht ein Klavierspieler, bzw. eine Klavierspielerin, je nach Fähigkeit, zwischen 20 und 30 Sekunden.

- a) Wie viele verschiedene Walzer sind möglich?
(Hinweis: Beachte vor allem die Möglichkeiten beim 8. und 16. Takt, also der Spalte H in der Tabelle)
- b) Wie lange würde es dauern, bis alle möglichen Walzer dieser Art gespielt sind, ohne dass sich einer wiederholt?
- c) Wie lange könnte eine Gesellschaft nur mit dieser Art von Walzer unterhalten werden?

Aufgabe 3 Wahrscheinlichkeit von Würfelwalzern

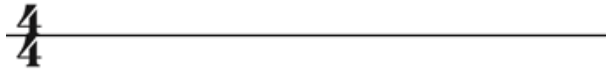
- a) Wie sieht der Walzer aus, wenn immer mit der größten (kleinsten) Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird? Wie groß sind die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten?
- b) Besteht eine Chance, dass zwei voneinander unabhängige Personen den exakt gleichen Walzer würfeln?
- c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Walzerteil mit folgenden Taktnummern: 99, 71, 48, 29, 112, 124, 44, 151 erwürfelt wird?

Arbeitsblätter Rhythmus, Metrum, Takt

Aufgabe 1 Brüche auf ein Ganzes aufteilen [77]

Einen $\frac{4}{4}$ -Takt besteht aus vier gleichmäßigen Viertelschlägen. Es sollen nur gleich lange Notenwerte aufgetragen werden.

- a) Es soll auf jeden Schlag eine Note erklingen, wie viele haben in diesem Takt Platz und wie heißen sie?



- b) Dieses Mal sollen die Noten für zwei Schläge erklingen, gesucht sind die Anzahl und der Name des Notenwertes.



- c) Dieses Mal sollen die Note(n) für vier Schläge erklingen, gesucht sind die Anzahl und der Name des Notenwertes.



- d) Dieses Mal sollen die Noten nur für einen halben Schlag erklingen, gesucht sind die Anzahl und der Name des Notenwertes.



- e) Erstelle zwei Variationen mit verschiedenen Notenwerten, die sich auf einen $\frac{4}{4}$ -Takt ausgehen



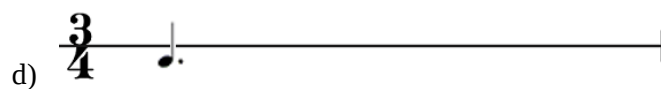
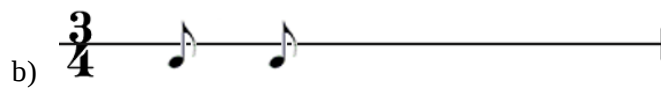
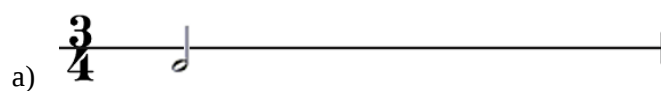
Aufgabe 2 Takte vervollständigen mit $\frac{4}{4}$ -Takten [77]

In den folgenden Aufgaben fehlen eine oder mehrere Noten. Es handelt sich um einen $\frac{4}{4}$ -Takt. Schreibe unter den jeweiligen Takt die Länge der Noten als Bruch und addiere sie, um die fehlenden Noten für den ganzen Takt zu erhalten.



Aufgabe 3 Takte vervollständigen mit $\frac{3}{4}$ -Takten [77]

In den folgenden Aufgaben fehlen eine oder mehrere Noten. Es handelt sich um einen $\frac{3}{4}$ -Takt. Schreibe unter den jeweiligen Takt die Länge der Noten als Bruch und addiere sie, um die fehlenden Noten für den ganzen Takt zu erhalten.



Aufgabe 4 Taktart finden [77]

In folgenden Takten fehlt die Taktart, gib an welche Taktart es sein muss.



Aufgabe 5 Taktstriche setzen [77]

In den folgenden Notenzeilen fehlen alle Taktstriche, setze sie dort ein, wo sie hingehören.



Arbeitsblätter Schwingungen

Aufgabe 1 Sinusfunktion erstellen

Verändere die Werte der Sinusfunktion so, dass das der Kammerton a' (also ein reines a') erklingt. $f(t) = r \cdot \sin(b \cdot t + \varphi)$

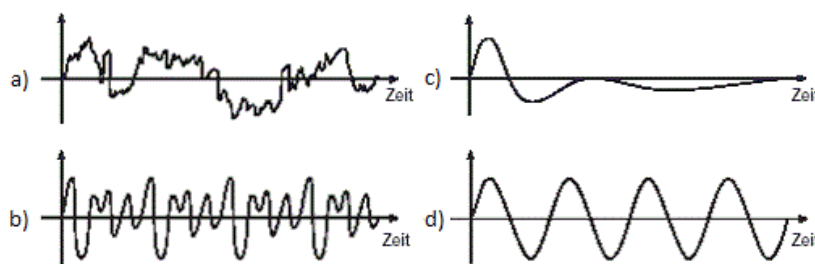
- Finde heraus, welche Frequenz der Kammerton a' hat.
- Welche Werte muss man für r , b und φ einsetzen, um auf die gewünschte Schwingung von a' zu kommen?
- Was bedeutet die Größe der Amplitude in diesem Zusammenhang?

Aufgabe 2 Harmonische Schwingungen berechnen

- Finde heraus, was harmonische Schwingungen sind.
- Wie kann man sich so eine Schwingung als Welle vorstellen? Vergleiche sie mit einer Sinusfunktion mit gleicher Periodenlänge.
- Berechne die Frequenzen der Obertöne des harmonischen Kammertons a' .

Aufgabe 3 Ordne die Begriffe Ton, Klang, Geräusch und Knall der Abbildung zu.

Begründe deine Antworten (auch in mathematischer Hinsicht).



Die Frequenz der Überlagerungsschwingung wird, wie folgt, berechnet: $f_R = \frac{f_1 + f_2}{2}$

Die Einhüllende Frequenz hingegen ist eine Subtraktion: $f_S = \frac{|f_1 - f_2|}{2}$

Aufgabe 4 Schwebung 2

Es ist folgende Funktion einer Schwebung bekannt:

$$y(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot 450 \cdot t) \cdot \cos(2\pi \cdot 10 \cdot t)$$

Versuche die beiden Stammfrequenzen herauszufinden, welche für die Schwebung verantwortlich sind. Die Amplitude bei beiden ist gleich groß.

Arbeitsblätter Stimmungen

Aufgabe 1 Tonfrequenzen

Der Kammerton a' hat eine Frequenz von 440 Hz (Hertz). Berechne den tiefsten Ton am Klavier, welcher genau vier Oktaven unter dem a' liegt.

- Welche Frequenz hat dieser Ton?
- Welche Länge muss eine Monochord-Saite haben, wenn sie für den Kammerton a' genau 20 cm lang sein muss?

Aufgabe 2 Saitenlänge in reiner Stimmung

Berechne das Intervall (in reiner Stimmung), welches entsteht, wenn du zuerst eine Monochord-Saite mit einer Länge von 150 cm anschlägst und anschließend die Saite auf 100 cm kürzt.

- Gib an, um welches Frequenzverhältnis es sich handelt.
- Wie lautet das Intervall, dem dieses Verhältnis zugeordnet werden kann?
- Welchen Ton hörst du beim zweiten Erklängen der Saite, wenn du beim ersten Mal ein c' vernimmst?

Aufgabe 3 Durtonleiter

Berechne für die Töne der Dur-Tonleiter (in reiner Stimmung) folgende Eigenschaften.
(Hinweis: $a \cong 220\text{ Hz}$)

- Lege eine Tabelle mit den Frequenzverhältnissen zu den Nachbartönen (Ganz- oder Halbtonschritte) an.
- Ergänze die Tabelle um die Frequenzen der einzelnen Töne.
- Was fällt dir auf?

Aufgabe 4 Teufel in der Musik

Im Mittelalter gab es ein Intervall in der pythagoreischen Tonleiter, welches verboten wurde und mit dem Namen „Teufel in der Musik“ bezeichnet wurde.

- a) Finde mit Hilfe deines Smartphones heraus, um welches Intervall es sich handelt.
- b) Wie groß ist das Frequenzverhältnis dieses Intervalls?
- c) Berechne die Frequenzen der beiden Töne unter Rücksichtnahme, dass das kleine a ($\cong 220 \text{ Hz}$) zwischen den beiden Tönen liegt.

Aufgabe 5 Cent-Skala

Gib an, welches Intervall und Frequenzverhältnis folgende Centwerte hat und zu welcher Stimmung dieses Intervall gehört.

- a) 696,5 Cent
- b) 906 Cent
- c) 300 Cent

Aufgabe 6 Mittelwerte in der temperierten Stimmung [36, S. 57]

In der temperierten Stimmung kann man mit Hilfe des geometrischen Mittels verschiedene Proportionen ausrechnen.

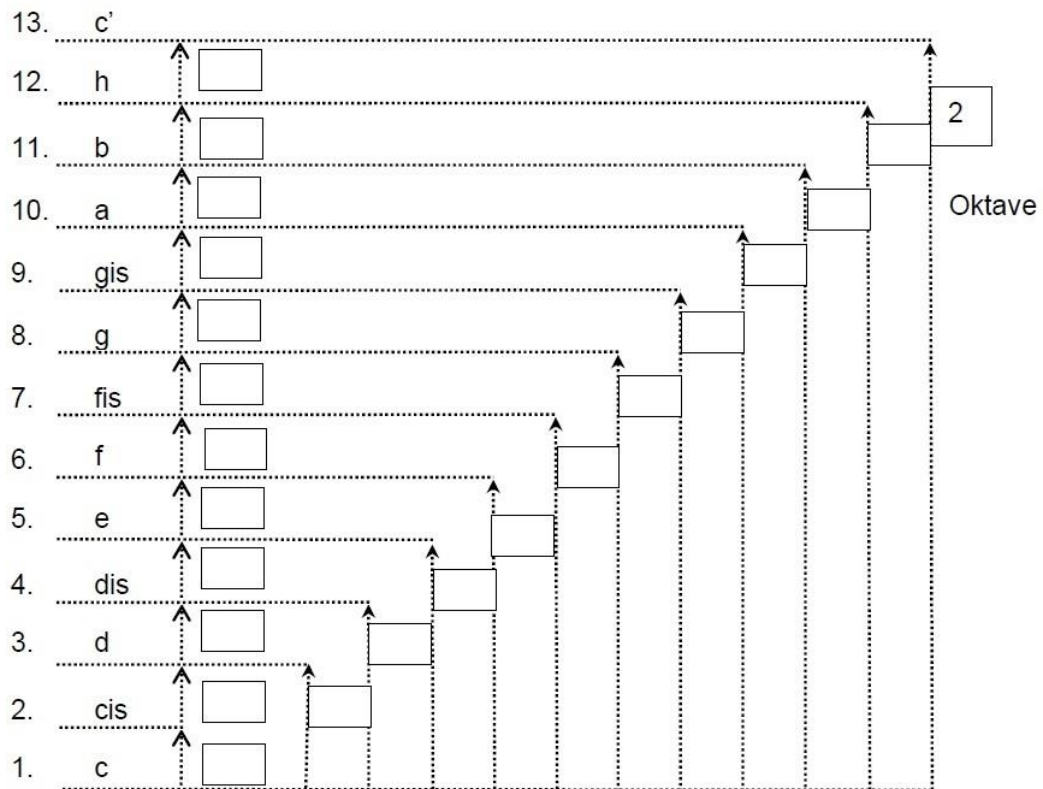
$$\sqrt[2]{f_1 \cdot f_2} = f_3$$

Gib das Frequenzverhältnis und den Namen des Intervalls an:

- a) Prim und Oktave
- b) Prim und Quinte
- c) Prim und Quart
- d) (große) Terz und Oktave
- e) Quart und Sext
- f) Was fällt dir auf, wenn du dir die dazugehörigen Werte aus der Cent-Skala ansiehst?

Aufgabe 7 Gleichschwebende temperierte Tonleiter

Neben der pythagoreischen Schwingung hat sich im 19. Jahrhundert eine andere Stimmung durchgesetzt, die gleichschwebende temperierte Stimmung. Diese beruht auf gleichstufigen Halbtonschritten. Die Oktave ist wie in allen anderen Stimmungen mit einem Saitenverhältnis von $2 : 1$ angegeben. Eine Oktave kann in insgesamt 12 Halbtonschritte eingeteilt werden, zwischen diesen Halbtönen soll jedes Saitenteilungsverhältnis gleich groß sein.



- Ergänze die fehlenden Werte in der Abbildung mit den richtigen Werten.
(Hinweis: Verwende dafür die Kurzschreibweise, welche du in der Abbildung an der Oktave erkennen kannst. Nur mehr 2 statt $2 : 1$)
- (Wenn ein Monochord vorhanden ist) Spiele am Monochord die 8 Töne des C-Dur in temperierter Stimmung nach.
- Berechne die einzelnen Frequenzen des C-Dur. (Hinweis der Ton *a* hat eine Frequenz von 220 Hz)

Aufgabe 8 Gitarre (wird benötigt und sollte gestimmt sein!)

In der Abbildung ist eine Gitarre samt Beschriftung der einzelnen Bauteile.



- Miss die Abstände zwischen Sattel und den einzelnen Bundstäben ab und vergleiche sie mit dem Abstand von Sattel zu Steg.
- Was fällt dir auf?
- Nach welcher Stimmung ist die Gitarre wahrscheinlich gestimmt?
- Die oberste, am tief klingendste Saite ist normalerweise in einem (großen) *E* ($\cong 82,41\text{ Hz}$) gestimmt. Finde heraus, welcher Ton sich am 12. Bundstab befindet.
- Bestimme die Töne der restlichen Saiten.
(Hinweis: Versuche sie mit der ersten Gitarrensaite zu vergleichen, wenn du an den Bundstäben der obersten Saite, von der Sattel-Seite aus Richtung Steg, niederdrückst)
- (Mit Internet-Hilfe) Finde heraus, was ein Flageolett-Ton ist und wie er erzeugt werden kann. Versuche auch selbst auf der Gitarre solche Töne zu erzeugen.

5.8 ExpertInnenfeedback

Vor der praktischen Erprobung der von mir erstellten Unterrichtsreihe, ließ ich mir Feedback zur Evaluation der Arbeitsblätter und der Unterrichtsplanung von einigen KollegInnen geben.

Durch meine KollegInnen wurde ich noch auf einige Fehler in den Arbeitsblättern hingewiesen und konnte diese Fehler noch ausbessern. Im gemeinsamen Gespräch wurden wir uns einig, dass die Arbeitsblätter für folgende Schulstufen gut geeignet sind:

- Euler'sches Netz 6. – 7. Schulstufe
- Würfelwalzer 11. Schulstufe
- Schwingungen: 10. Schulstufe
- Stimmungen: 6. – 8. Schulstufe (je nach Aufgabe)

Abgesehen von den oben erwähnten Verbesserungsvorschlägen bezüglich der Formulierung der Arbeitsaufträge fand ich es bemerkenswert, dass der gemeinsame Tenor war, dass es schwer sei, eine profunde Evaluation abzugeben, da den MathematikkollegInnen das musikalische Hintergrundwissen fehlte, den MusikkollegInnen aber im Gegenzug das mathematische. Es sei daher teilweise sehr schwer, die Aufgaben hinsichtlich ihrer inhaltlichen Qualität zu bewerten. Obwohl gerade an der Schulform WienerMittelSchule der fächerübergreifende Unterricht angestrebt wird, gibt es dennoch nur eine limitierte Zahl von Best Practice Beispielen. Daher wurde von etlichen KollegInnen vorgeschlagen, diese Unterrichtsreihe nach Erprobung allen KollegInnen zur Verfügung zu stellen und am Tag der Offenen Tür zu präsentieren. Diese kann auch in Form eines offenen Stationenbetriebs erfolgen.

Eine weitere interessante Erkenntnis, welche ich aus den Interviews zog, war, dass vielen MathematikerInnen nicht bewusst war, dass Euler auch für die wissenschaftliche Erforschung der Musik einen wesentlichen Beitrag leistete. Dass den SchülerInnen im Zuge dieser Unterrichtsreihe wichtige mathematische Größen wie Pythagoras und Euler auf einer anderen Ebene noch einmal nähergebracht wurde, wurde einhellig positiv hervorgehoben.

Die wesentlichsten positiven Punkte, welche genannt wurden, bezogen sich im Wesentlichen auf zwei Ebenen: Einerseits wurde hervorgehoben, dass die Art der Aufgabenstellung zu einem lustbetonten Lernen beitragen kann (vor allem in Bezug auf die Würfelwalzer), andererseits wurde die Aufforderung zur eigenen Recherchetätigkeit hervorgehoben. Es sei wichtig, dass die SchülerInnen auch schon in der Unterstufe lernen, selbst zu recherchieren, da dies eine wichtige Kompetenz vor allem auch für die Erstellung einer VWA in der Oberstufe darstelle.

In den Interviews wurde jedoch auch die Kritik geäußert, dass die Unterrichtsreihe keine Einführung enthalte. Dies war auch ein Grund dafür, in der 2. Erprobung Musik im Hintergrund zu spielen, um zu testen, ob die musikalische Untermalung besser ins Thema einführen könne. Manche ExpertInnen meinten, es wäre sehr schwer zu evaluieren, ob alle Aufgabenstellungen klar formuliert seien, da sie das Vorwissen der SchülerInnen nicht beurteilen könnten und dieses sicherlich eine wesentliche Komponente sei, um alle Arbeitsaufträge zu verstehen.

Summa summarum war das Feedback jedoch durchaus positiv und ich wurde darin bestärkt, die Unterrichtsreihe in der von mir geplanten Form durchzuführen. Dank einiger Hinweise bezüglich der Formulierung und Gestaltung der Arbeitsblätter, konnte ich diese noch einmal zielgerichtet überarbeiten und ausformulieren. Außerdem wurde mir in den intensiven Gesprächen mit meinen KollegInnen bewusst, dass ein gut durchdachter und vorbereiteter fächerübergreifender Unterricht auf nachhaltige Weise einen positiven und wichtigen Beitrag zur Kompetenzförderung beiträgt. Dies bezieht sich vor allem auf die Fähigkeit des eigenen logischen Denkens. Zusätzlich macht ein fächerübergreifender Unterricht den SchülerInnen bewusst, dass der Stoff, den sie in der Schule lernen, auch aktiv angewendet werden kann und dass die Mathematik eine wissenschaftliche Disziplin darstellt, ohne welche auch die kreativ-künstlerischen Fächer nicht auskommen. Die wesentliche Botschaft, welche alle ExpertInnen in den Aufgabenstellungen erkannten, ist: *Non scholae, sed vitae discimus.*

6 Fazit

Dass die Mathematik und die Musik etwas miteinander zu tun haben, steht ohne Zweifel fest. Außerdem lässt sich sagen, dass sich die Musik gut eignet, um damit mathematische Konzepte anschaulicher zu machen und einen Realitätsbezug herzustellen. Es kann dadurch auch der Unterricht aufgelockert werden. Natürlich ist es nicht immer sinnvoll, auf Biegen und Brechen, durch außermathematische Anwendungen den Unterricht zu erweitern, aber die Musik eignet sich dafür fast wie von selbst.

Allerdings darf nicht vergessen werden, dass sich die Lehrperson auch gut mit dem Thema auseinandersetzen und eventuell gemeinsam mit den KollegInnen aus Musik zusammenarbeiten muss. Der Mehraufwand lohnt sich aber, da die SchülerInnen somit eine neue Bezugsebene haben, mit der sie Mathematik verbinden können.

Die Themen, die in der Arbeit besprochen werden, können auch in einem EDV-Raum bearbeitet werden. Mit Zuhilfenahme von Programmen wie GeoGebra oder Audacity können beim Thema Schwingungen Aufgaben veranschaulicht und vertieft werden. Außerdem können im Internet noch mehr Informationen gewonnen werden, damit die SchülerInnen auch selbständig weiterarbeiten.

Was in dieser Arbeit nicht behandelt wurde, sich allerdings auch gut für die Schule eignen würde, ist der Goldene Schnitt welcher in der Musik vor allem im Instrumentenbau vertreten ist, aber auch sehr häufig in der Kunst zur Anwendung kommt.

Für eine technische Schule, wie zum Beispiel eine HTL, bieten sich auch die Fourier-Reihen an. Ersteres kann als Erweiterung bei Schwingungen verwendet werden und bildet eine Grundlage in der Informatik, die beim bekannten mp3-Format zu Tragen kommt. Dieses Thema kommt aber nicht im AHS-Lehrplan vor.

Literaturverzeichnis

- [1] E. Hering, R. Martin, und M. Stohrer, *Physik für Ingenieure*, 11., bearb. Aufl. Heidelberg: Springer, 2012.
- [2] Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, „Oszillation - Lexikon der Neurowissenschaft“, Juli 26, 2019. <https://www.spektrum.de/lexikon/neurowissenschaft/oszillation/9343> (zugegriffen Juli 26, 2019).
- [3] K. Magnus und K. Popp, *Schwingungen: eine Einführung in physikalische Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*, 7., durchges. Aufl. Stuttgart: Teubner, 2005.
- [4] B. Grotz, „Mechanische Schwingungen — Grundwissen Physik“, Juli 26, 2019. <https://www.grundwissen.de/physik/mechanik/schwingungen-und-wellen/schwingungen.html> (zugegriffen Juli 26, 2019).
- [5] Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, „Amplitude - Lexikon der Physik“, Juli 26, 2019. <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/amplitude/477> (zugegriffen Juli 26, 2019).
- [6] M. Evers, „Beschreibung von Schwingungen - Amplitude, Schwingungsdauer und Frequenz“, Juli 26, 2019. <https://physikunterricht-online.de/jahrgang-7/beschreibung-von-schwingungen/> (zugegriffen Juli 26, 2019).
- [7] Examio GmbH, „Amplitude, Schwingungsdauer, Frequenz - Physik“, Juli 26, 2019. <https://www.ingenieurkurse.de/physik/schwingungen/ungedaempfte-harmonische-schwingungen/amplitude-schwingungsdauer-frequenz.html> (zugegriffen Juli 26, 2019).
- [8] G. Malle, M. Koth, H. Woschitz, S. Malle, B. Salzger, und A. Ulovec, *Mathematik verstehen* 6. 2018.
- [9] o.A., „Tonhöhe und Lautstärke in Physik | Schülerlexikon | Lernhelfer“. <https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik/artikel/tonhoehe-und-lautstaerke> (zugegriffen Feb. 26, 2020).
- [10] Geers, „Das menschliche Ohr: Aufbau und Funktion | GEERS“. <https://www.geers.de/rund-ums-hoeren/das-ohr/> (zugegriffen Feb. 24, 2020).
- [11] R. Grimm, „Körperschall & Luftschall: Definition, Entstehung, Messung“. <https://www.baustoffwissen.de/baustoffe/baustoffknowhow/bauphysik/koerperschall-definition-bauphysik-luftschall-raum-schall-entstehung-umwandlung-knochenleitung/> (zugegriffen Feb. 24, 2020).
- [12] o.A., „Sinuston“, *Wikipedia*. Aug. 09, 2019, Zugriffen: Feb. 24, 2020. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Sinuston&oldid=191176194>.
- [13] U. Michels, „Systematischer Teil: Musikgeschichte von den Anfängen bis zur Renaissance“, in *dtv-Atlas Musik (Buch 1)*, Orig.-Ausg., 22., Durchges. und Korrigierte Aufl., München: Dt. Taschenbuch-Verl, 2008.
- [14] H. Gobrecht, L. Bergmann, und C. Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik / Mechanik, Akustik, Wärme*, 9., verb. Aufl. Berlin: de Gruyter, 1974.
- [15] o.A., „Geräusch“, *Wikipedia*. Jan. 06, 2020, Zugriffen: Feb. 24, 2020. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ger%C3%A4usch&oldid=195570636>.
- [16] o.A., „Knall“, *Wikipedia*. Juli 09, 2017, Zugriffen: Feb. 24, 2020. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Knall&oldid=167122283>.
- [17] L. Murmann und P. Ryder, „Schallwellen“. http://www.idn.uni-bremen.de/cvpmmm/content/wellen/show.php?modul=3&file=69&right=we_r_16_diesonne2.html (zugegriffen Feb. 24, 2020).
- [18] J. Pascher, „Oberton“, *Wikipedia*. Okt. 27, 2019, Zugriffen: Feb. 24, 2020. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Oberton&oldid=193506680>.
- [19] D. E. Hall und J. Goebel, *Musikalische Akustik: ein Handbuch*, 2. Aufl. Mainz: Schott, 2003.
- [20] W. Gurlitt und H. H. Eggebrecht, *Riemann-Musik-Lexikon : in drei Bänden : Sachteil*. Mainz: Schott, 1967.
- [21] C. Gerthsen und D. Meschede, Hrsg., *Physik*, 22. Auflage. Berlin: Springer, 2004.
- [22] J. Mohr, „Schwebung“, *Wikipedia*. Jan. 12, 2020, Zugriffen: Feb. 24, 2020. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Schwebung&oldid=195744599>.
- [23] Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, *Verordnung des Bundesministers für Unterricht und Kunst vom 14. November 1984 über die Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht an diesen Schulen StF: BGBl. Nr. 88/1985 idF. BGBl. II Nr. 395/2019*. .
- [24] M. Kraneburg, „Pythagoras in der Schmiede - Physik an der Waldorfschule“. <https://www.waldorfindeen-pool.de/Schule/faecher/physik/klasse-6/versuche-zur-akustik/pythagoras-in-der-schmiede> (zugegriffen Juli 27, 2019).

- [25] E. Müller-Baden, *Bibliothek des allgemeinen und praktischen Wissens für Militär-Anwärter Band III*. Bong & Co, 1905.
- [26] K. Sumeder, „Musik und Mathematik“. <http://www.genius.co.at/index.php?id=49> (zugegriffen Juli 27, 2019).
- [27] E. Schröder, *Mathematik im Reich der Töne*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1982.
- [28] C. Hartfeldt, W. Eid, und H. Henning, *Mathematik in der Welt der Töne*. Magdeburg: Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt, 2002.
- [29] C. Eitz, *Das mathematisch-reine Tonsystem: gemeinverständlich dargestellt*. Breitkopf & Härtel, 1891.
- [30] J. Mohr und Cebus, „Syntonisches Komma“, *Wikipedia*. Okt. 11, 2019, Zugegriffen: Feb. 23, 2020. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Syntonisches_Komma&oldid=193034913.
- [31] R. Amon, *Lexikon der Harmonielehre: Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazz-Akkorde*, 2., völlig neu überarbeitete und ergänzte Auflage. Wien : Stuttgart: Doblinger ; Metzler, 2015.
- [32] J. Mohr, „Mitteltönige Stimmung“, *Wikipedia*. Okt. 10, 2019, Zugegriffen: Okt. 30, 2019. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Mittelt%C3%B6nige_Stimmung&oldid=193019274.
- [33] E. Neuwirth, *Musikalische Stimmungen*. Wien: Springer Wien, 1997.
- [34] E. Dunne und M. McConnell, „Pianos and Continued Fractions“, *Mathematics Magazine*, Bd. 72, Nr. 2, Apr. 1999.
- [35] J. Mohr, „Schisma (2Cent): Joachim Mohr Mathematik Musik Delphi“. <https://kilchb.de/schisma.php> (zugegriffen Feb. 23, 2020).
- [36] B. Posch, „Musik und Mathematik im Unterricht : Vernetzungsmöglichkeiten, Beispiele und fachdidaktische Analyse“, Diplomarbeit, Universität Wien, 2013.
- [37] H. Freudenthal, „Warum hat die Tonleiter nur zwölf Töne?“, *Mathematik lehren*, Nr. 1/Nov, 1983.
- [38] J. Stowasser, *Stowasser, Lateinisch-Deutsches Schulwörterbuch*. Verlag Holder-Pichler-Tempsky, 2008.
- [39] A. M. Schlager, „Versetzungszeichen“. http://notenlehre.interaktiv-lernen.net/pages/grundlagen_3.html (zugegriffen Dez. 30, 2019).
- [40] F. Riewe, *Handwörterbuch der Tonkunst : sachlich und biographisch*. Gütersloh: Bertelsmann, 1879.
- [41] C. Probst, „Enharmonische Verwechslung“. <https://www.theorie-musik.de/grundlagen/enharmonische-verwechslung/> (zugegriffen Dez. 30, 2019).
- [42] A. M. Schlager, „Notenlehre inter@ktiv“. <http://notenlehre.interaktiv-lernen.net/> (zugegriffen Feb. 11, 2020).
- [43] C. Probst, „Tonleiter“. <https://www.theorie-musik.de/tonleiter/> (zugegriffen Feb. 11, 2020).
- [44] P. Paffgen, „Gitarre-und-Laute.de“. <https://gitarre-und-laute.de/> (zugegriffen Feb. 11, 2020).
- [45] A. Holl, M. Gabriel-Peer, und J. Huber, „Schwingende Mathematik am Monochord“. Juli 2005, Zugegriffen: Feb. 01, 2020. [Online].
- [46] E. Delle, G. Krieger, und H. W. Spies, *Tonleitern der Weltkulturen für Auge und Ohr: Berechnung und optische Darstellung von Tonleiterstrukturen in Impulse für das interkulturelle Lernen*. RAA-Hauptstelle, 1995.
- [47] W. Seidel, „Rhythmus, Metrum, Takt“, *Die Musik in Geschichte und Gegenwart*. Bärenreiter and Metzler and RILM, Kassel and Stuttgart and New York, Nov. 2016.
- [48] o.A., „Takt (Musik)“, *Wikipedia*. Nov. 23, 2019, Zugegriffen: Feb. 26, 2020. [Online]. Verfügbar unter: [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Takt_\(Musik\)&oldid=194305221](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Takt_(Musik)&oldid=194305221).
- [49] C. Probst, „Taktarten“. <https://www.theorie-musik.de/grundlagen/taktarten/> (zugegriffen Feb. 26, 2020).
- [50] o.A., „Notenwert“, *Wikipedia*. Feb. 25, 2020, Zugegriffen: Feb. 26, 2020. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Notenwert&oldid=197157966>.
- [51] M. Haas u. a., „Notation“, *Die Musik in Geschichte und Gegenwart*. Bärenreiter and Metzler and RILM, Kassel and Stuttgart and New York, 1997.
- [52] o.A., „Punktierung (Musik)“, *Wikipedia*. Mai 22, 2019, Zugegriffen: Feb. 26, 2020. [Online]. Verfügbar unter: [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Punktierung_\(Musik\)&oldid=188849368](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Punktierung_(Musik)&oldid=188849368).
- [53] H. Breidenstein, „Mozart's Tempo Indications, Mozarts Tempobezeichnungen“. <http://www.mozart-tempi.net/4579/52001.html> (zugegriffen Feb. 26, 2020).
- [54] o.A., „Tempo (Musik)“, *Wikipedia*. Dez. 28, 2019, Zugegriffen: Feb. 26, 2020. [Online]. Verfügbar unter: [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Tempo_\(Musik\)&oldid=195280734](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Tempo_(Musik)&oldid=195280734).

- [55] I. Bengen, K.-E. Behne, W. Frobenius, und I. Bengen, „Tempo“, *Die Musik in Geschichte und Gegenwart*. Bärenreiter and Metzler and RILM, Kassel and Stuttgart and New York, 1998.
- [56] o.A., „Agogik (Musik)“, *Wikipedia*. Apr. 02, 2019, Zugriffen: Feb. 26, 2020. [Online]. Verfügbar unter: [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Agogik_\(Musik\)&oldid=187169921](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Agogik_(Musik)&oldid=187169921).
- [57] o.A., „Fermate“, *Wikipedia*. Dez. 12, 2019, Zugriffen: Feb. 26, 2020. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Fermate&oldid=194844633>.
- [58] R. Taschner, *Der Zahlen gigantische Schatten: Mathematik im Zeichen der Zeit*, 4., erweiterte Auflage. Wiesbaden: Springer, 2017.
- [59] A. Schaurhofer, „Musik und ihre mathematische Saite“, Diplomarbeit, Universität Wien, 2009.
- [60] B. Fernbacher und Rarus, „Die Kunst der Fuge“, *Wikipedia*. Jan. 13, 2020, Zugriffen: Feb. 21, 2020. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Die_Kunst_der_Fuge&oldid=195784946.
- [61] D. D. Scholz, „Eisenach: Bach und die Zahlen 2014“. <https://dieterdavidscholz.de/ausstellungen/eisenach-bach-und-die-zahlen-2014.html> (zugegriffen Feb. 21, 2020).
- [62] K. Luehrs-Kaiser, „Zahlenmystik: Johann Sebastian Bach – Fetischist der Vierzehn“, *DIE WELT*, Berlin, Apr. 24, 2014.
- [63] J. Voss, „Adventsserie: Bach und die Geschichte seiner 14 Knöpfe“, *RP ONLINE*. https://rp-online.de/nrw/staedte/krefeld/bach-und-die-geschichte-seiner-14-knoepfe_aid-47625569 (zugegriffen Feb. 22, 2020).
- [64] Rarus, „Zwölftontechnik“, *Wikipedia*. Zugriffen: Feb. 22, 2020. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/wiki/Zw%C3%B6lftontechnik>.
- [65] P. Sammer, „Schönberg und die Zwölftonmusik“. <http://www.aeiou.at/aeiou/musikkolleg/schoenberg> (zugegriffen Feb. 23, 2020).
- [66] M. Michaelis, „Glossar: Zwölftontechnik / Dodekaphonie « Michael Michaelis“. http://www.michael-michaelis.de/index.php/comment/0901281856_ohr (zugegriffen Feb. 23, 2020).
- [67] o.A., „Tonhöhenklasse“, *Wikipedia*. Nov. 03, 2019, Zugriffen: Feb. 23, 2020. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Tonh%C3%B6henklasse&oldid=193723383>.
- [68] J. Moor, „Euler’sches Tonnetz“, *Wikipedia*. Feb. 08, 2020, Zugriffen: Feb. 23, 2020. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Eulersches_Tonnetz&oldid=196627098.
- [69] J. Mohr, *Das Euler’sche Tonnetz : Joachim Mohr Mathematik Musik Delphi*. .
- [70] o.A., „Musikalische Würfelspiele“, *Journal des Luxus und der Moden*, Paris, Feb. 1787.
- [71] O. E. Deutsch, „Mit Würfeln komponieren“, *Zeitschrift fuer Musikwissenschaft*, Nr. 12Jg, 1930 1929, Zugriffen: Feb. 17, 2020. [Online]. Verfügbar unter: <http://archive.org/details/ZeitschriftFuerMusikwissenschaft12jg1929-30>.
- [72] N. Christmann, „Stochastik und Musik: Grundideen der Stochastischen Musik im Unterricht“, gehalten auf der 44. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, München, März 2010.
- [73] C. Reuter, „Der Würfel als Autor. Würfelmusik und Zufallstexte des 17.–19. Jahrhunderts“, 2013.
- [74] P. Oberhuemer und F. Embacher, „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik 1 - Mathematische Hintergründe“. <https://www.mathe-online.at/mathint/wstat1/i.html> (zugegriffen Feb. 18, 2020).
- [75] E. Behrends, *Fünf Minuten Mathematik: 100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung DIE WELT*, 3. Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.
- [76] P. Pachner, „BG-BRG WMS Wien 22“, *BRG Seestadt*. <https://www.brg-seestadt.at/> (zugegriffen Feb. 27, 2020).
- [77] W. Eid, „Musik und Mathematik - Unterricht am Beispiel der Bruchrechnung.“, *Mathematische Unterrichtspraxis*, Bd. 21, Nr. 2. S. 20–27, 2000.

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1 Schaukeln als mechanische Schwingung [4].....	2
Abb. 2 Periodische Veränderung physikalischer Größen beim Pendel [4]	3
Abb. 3 Sinusfunktion (erstellt mit GeoGebra)	4
Abb. 4 Sinuswelle eines a (mit 220 Hz) (erstellt mit GeoGebra)	4
Abb. 5 Ton – Klang – Geräusch – Knall [17]	7
Abb. 6 Harmonische Schwingung (erstellt mit GeoGebra).....	8
Abb. 7 Harmonische Teilschwingungen von idealen Saiten [18]	9
Abb. 8 Harmonische Obertonreihe. Vergleich zur temperierten Stimmung (Unterschied in Cent) [18]	9
Abb. 9 Schwebung von zwei Frequenzen (erstellt in GeoGebra)	11
Abb. 10 Lösung Aufgabe 1 (erstellt in GeoGebra)	13
Abb. 11 Monochord [25, S. 153]	18
Abb. 12 „Quintenzirkel zur Konstruktion der Schwingungszahlen nach dem pythagoreischen Stimmungsprinzip“ [27, S. 51]	21
Abb. 13 Klaviatur mit 19 Tonschritten (Cembalo universale) [32].....	29
Abb. 14 moderne Klaviatur[42]	35
Abb. 15 Klaviatur [43].....	37
Abb. 16 Angabe Pythagoreische Tonleiter Aufgabe 1 [45, S. 45].....	38
Abb. 17 Lösung Pythagoreische Tonleiter Aufgabe 1	39
Abb. 18 Gebräuchliche Notenwerte [50]	46
Abb. 19 Noten- und Pausenwerte übereinander [50]	47
Abb. 20 Punktierte Noten [52].....	47
Abb. 21 Achteltriolen, Vierteltriolen und Halbetriolen [50].....	48
Abb. 22 Fermate [57].....	49
Abb. 23 Johann Sebastian Bach als Noten [59, S. 81]	50
Abb. 24 Natürliche Zahlen Alphabet [61].....	51
Abb. 25 Grundform Alban Bergs Violinkonzert [66]	53
Abb. 26 Umkehrung Alban Bergs Violinkonzert [66]	53
Abb. 27 Krebs Alban Bergs Violinkonzert [66].....	53
Abb. 28 Krebs der Umkehrung Alban Bergs Violinkonzert [66].....	53
Abb. 29 Schönberg, Klavierstück op. 33a, Takt 1 bis 5 mit Reihenanalyse [64].....	54
Abb. 30 Euler'sches Tonnetz (Quinte-Terz-Schema) [68].....	56
Abb. 31 Eine C -Dur-Tonleiter in harmonisch-reiner Quinte-Terz Stimmung [68].....	57
Abb. 32 Sechs Notentafeln des Würfelwalzers von Mozart [72, S. 207f].....	62
Abb. 33 Zwei Beispiele für Würfelmenuett und Würfelwalzer [72, S. 208].....	62
Abb. 34 Anleitung für den Würfelwalzer im Unterricht (in „altem“ Deutsch) [72, S. 205]	64
Abb. 35 WienerMittelSchule Seestadt/Simonsgasse [76]	69

Tabellenverzeichnis

Tab. 1 Zusammenhang $\log_2(x)$ und Oktavenabstände bei harmonischen Obertonreihen	10
Tab. 2 Lösung Aufgabe 1.....	14
Tab. 3 Zusammenhang $\log_2(x)$ und Oktavenabstände bei harmonischen Obertonreihen	14
Tab. 4 Tonverhältnisse pythagoreische Stimmung	20
Tab. 5 Übersicht des pythagoreischen Tonsystems[28, S. 7].....	21
Tab. 6 Übersicht des reinen / diatonischen Tonsystems [27, S. 55].....	24
Tab. 7 Zahlenverhältnisse der reinen / diatonischen Intervalle [29, S. 3]	24
Tab. 8 Vergleich der pythagoreischen und reinen / diatonischen Stimmung mit Hilfe der Verhältniszahlen [27, S. 57].....	25
Tab. 9 Vergleich der Schwingungszahlen in Dezimalschreibweise (bezogen auf Grundton c) [27, S. 67]	30
Tab. 10 Vergleich der vorgestellten Stimmungssysteme [36, S. 49]	32
Tab. 11 Noten mit Vorzeichen [39]	34
Tab. 12 Enharmonische Verwechslung [41].....	35
Tab. 13 Aufgabe 1 b) Tonintervalle [45, S. 45].....	39
Tab. 14 Lösung zu Aufgabe 1 b) Tonintervalle	39
Tab. 15 italienische Tempobezeichnungen mit Bpm [54]	48
Tab. 16 Tonhöhenklassentabelle [67]	55
Tab. 17 Reine Tonleitern nach Eulerschreibweise [69]	57
Tab. 18 Mozarts Würfelwalzer Teil 1 [73, S. 198]	60
Tab. 19 Mozarts Würfelwalzer Teil 2 [73, S. 198]	60

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name: Jakob Faistauer
Geburtstag: 02.03.1991
Geburtsort: Zell am See
Staatsangehörigkeit: Österreich

Ausbildung:

1997 – 2001 Volksschule Bruck/Glstr.
2001 – 2005 Hauptschule Bruck/Glstr.
2005 – 2009 Realgymnasium Zell/See
2009 – 2020 Lehramtsstudium UF Mathematik und UF Informatik
an der Universität Wien
2014 – 2015 Zivildienst, WITAF – Gehörlosenverband, Wien
2017 – jetzt Lehrer (BG-BRG-Maria-Trapp-Platz)