

## 1. Lektion: Geraden in der x-y-Ebene

siehe dazu auch [Punktsteigungsform](#) und [Zweipunkteform](#)

1. Gib die Gleichungen der Geraden an und prüfe, ob der Punkt X auf ihr liegt.

Lösung:

Berechne zuerst die Steigung  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  (falls  $x_2 \neq x_1$ )

der Geraden durch  $P(x_1|y_1)$  und  $Q(x_2|y_2)$

und berechne aus  $y = mx + c$  den y-Abschnitt c

durch Punktprobe oder rechne gleich mit der

**Punktsteigungsform:**  $y = m(x - x_1) + y_1$

(Gerade durch  $P(x_1|y_1)$  mit der Steigung m)

- a) Die Gerade durch  $P(6|0)$   $Q(0|3)$ :  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ .

$X(10|-2)$  liegt auf der Geraden.

- b) Die Gerade durch  $A(2|2)$  parallel zur Geraden durch  $B(0|-1)$   $C(1|1)$ :

$y = 2x - 2$ .  $X(10|20)$  liegt nicht auf der Geraden, sondern  $Y(10|18)$ .

- c) Die Gerade durch  $Q(0|3)$  parallel zur x-Achse:  $y = 3$ .

d.h. Alle Punkt  $X(x|y)$  mit (x beliebig und)  $y = 3$  liegen auf der Geraden.

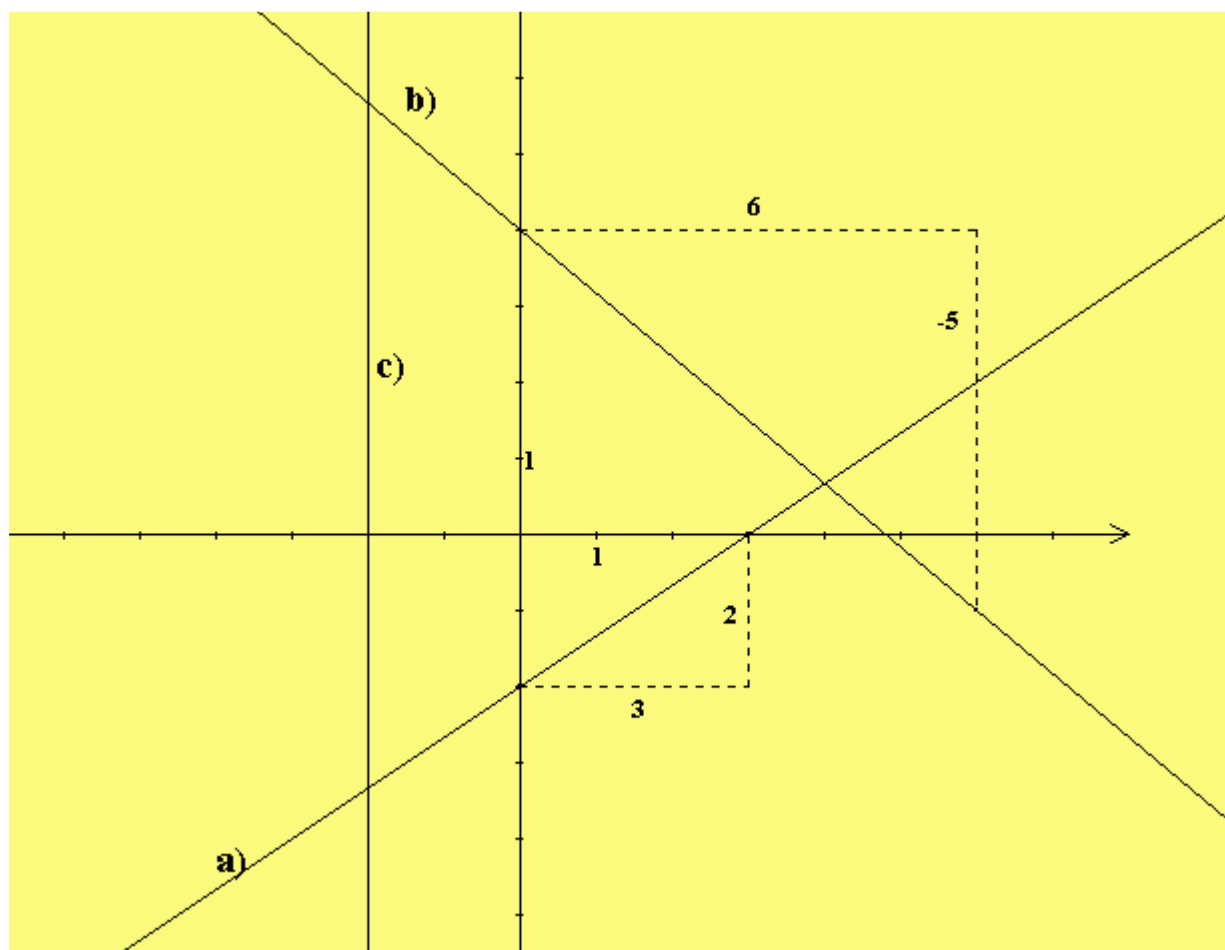
$X(11|3)$  liegt auf der Geraden.

- d) Die Gerade durch  $N(3|0)$  parallel zur y-Achse:  $x = 3$

d.h. Alle Punkt  $X(x|y)$  mit (y beliebig und)  $x = 3$  liegen auf der Geraden.

$X(3|11)$  liegt auf der Geraden.

2. Zeichne bei a) und b) ein Steigungsdreieck aus  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



## 10. Lektion: Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Siehe auch: ["Kettenregel"](#)!

1 a)  $f(x) = 2x^2 \cdot \sin x$       b)  $g(t) = \frac{2t^2}{\sin t}$       c)  $h(x) = (4 - 5x^2)^3$

Lösungen:

a)  $f'(x) = 4x \cdot \sin x + 2x^2 \cos x$

$$b) g'(t) = \frac{4t \cdot \sin t - 2t^2 \cos t}{\sin^2 t}$$

$$c) h'(x) = -30x(4 - 5x^2)^2$$

$$2) a) f_t(x) = 2t^2 x \sin x \quad b) g_a(t) = \frac{2a^2 t^2}{(a-1) \cos t} \quad c) h_t(x) = (t^2 - t^3 x^2)^3$$

Lösungen:

$$a) f'_t(x) = 2t^2 \sin x + 2t^2 x \cos x$$

$$b) g'_a(t) = \frac{4(a-1)a^2 t \cos t + 2(a-1)a^2 t^2 \sin t}{(a-1)^2 \cos^2 t} = \frac{2a^2 (2t \cos t + t^2 \sin t)}{(a-1) \cos^2 t}$$

$$c) h'_t(x) = -6t^3 x(t^2 - t^3 x^2)^2$$

$$3) a) f(x) = \sqrt{2 - 4x} \quad b) g(t) = G - ae^{-kt} \quad c) h(x) = (x-1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Lösungen:

$$a) f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{2-4x}}$$

$$b) g'(t) = ake^{-kt}$$

$$c) h'(x) = (-x^2 + x + 1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

## 11. Lektion: Erst umformen, dann ableiten

Forme erst um und leite dann ab!

Aufgabe und Lösung:

$$a) f_t(x) = \frac{t(x^3 - 2x^2 + 3)}{x^2} = t(x - 2 + \frac{3}{x}) \Rightarrow f'_t(x) = t(1 - \frac{6}{x^2})$$

$$b) f(x) = \frac{5}{(2x-1)^2} = 5(2x-1)^{-2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{20}{(2x-1)^3}$$

## 12. Lektion: Stammfunktionen und Integrale

Ermittle die Stammfunktion! Mache stets die Probe durch Ableiten!

$$1. a) f(x) = 5(2x-4)^5 \quad b) g(t) = \frac{1}{2} \cos 2t \quad c) h(t) = 10 - 3e^{-4t}$$

Lösung:

$$a) F(x) = \frac{5}{12} (2x-4)^6 \quad F'(x) = \frac{5}{12} \cdot 6 \cdot 2(2x-4)^5 = f(x)$$

$$b) G(t) = \frac{1}{4} \sin 2t \quad G'(t) = \frac{1}{4} \cdot (\cos 2t) \cdot 2 = g(t)$$

$$c) H(t) = 10t + \frac{3}{4} e^{-4t} \quad H'(t) = 10 + \frac{3}{4} \cdot (-4) e^{-4t} = h(t)$$

$$2. a) f_t(x) = t(tx - t^2)^5 \quad b) g_a(t) = a \sin a^2 t \quad d) h(t) = G - ae^{-kt}$$

Lösung:

$$a) F_t(x) = \frac{1}{6} (tx - t^2)^6 \quad F'_t(x) = \frac{1}{6} \cdot 6 (tx - t^2)^5 \cdot t = f_t(x)$$

$$b) G_a(t) = -\frac{1}{a} \cos a^2 t \quad G'_a(t) = -\frac{1}{a} (-\sin a^2 t) \cdot a^2 = g_a(t)$$

$$c) H(t) = Gt + \frac{a}{k} e^{-kt} \quad H'(t) = G + \frac{a}{k} \cdot (-k) e^{-kt} = h(t)$$

3. Aufgaben und Lösungen:

$$a) \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{4} dx = \left[ -4 \cos \frac{x}{4} \right]_0^{2\pi} = -4 \cos \frac{\pi}{2} + 4 \cos 0 = 4$$

$$b) \int_0^8 \sqrt{2x} dx = \left[ \frac{1}{3} (2x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^8 = \left[ \frac{1}{2} 2x \sqrt{2x} \right]_0^8 = \frac{64}{3}$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{1}{(2x+2)^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2(2x+2)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$

4. Aufgaben und Lösungen

$$a) \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t} dt = \left[ -2e^{-\frac{1}{2}t} \right]_0^x = 2 - 2e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$b) \int_0^x \sin \frac{\pi}{2} t dt = \left[ -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} t \right]_0^x = \frac{2}{\pi} (1 - \cos \frac{\pi}{2} x)$$

$$c) \int_0^x f'(2t) dt = \left[ \frac{1}{2} f(2t) \right]_0^x = \frac{1}{2} (f(2x) - f(0))$$

## 20. Lektion: Asymptoten

$$1 \text{ a) } f(x) = \frac{2x-3}{3-4x} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x-1}$$

Lösungen:

$$\text{a) Pol (senkrechte Asymptote) } x = \frac{3}{4}$$

$$\text{Verhalten für } x \rightarrow \pm\infty \text{ (waagrechte Asymptote) } y = -\frac{1}{2}$$

b) Pol (senkrechte Asymptote)  $x = 0$  (y-Achse)

$$\text{Verhalten für } x \rightarrow \pm\infty \text{ (schiefe Asymptote) } y = \frac{1}{2}x - 1, \text{ da } f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2x}$$

$$\text{und } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$\text{c) [Polynomdivision](#) ergibt } f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4(2x-1)}$$

$$\text{Pol } x = \frac{1}{2} \text{ schiefe Asymptote } y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \text{ (siehe auch [Koeffizientenvergleich](#))}$$

$$2 \text{ a) } f(t) = 2 - e^{-0.001t} \quad \text{b) } f(x) = \frac{e^x + 3}{2 - e^x} \quad \text{c) } f(x) = (1 - 4x)e^{-\frac{1}{2}x}$$

Lösungen:

$$\text{a) Asymptote ist die (positive) x-Achse, da } \lim_{x \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

b) senkrechte Asymptote (Pol)  $x = \ln 2$

$$\text{waagrechte Asymptote (Verhalten für } x \rightarrow +\infty) y = -1$$

$$\text{waagrechte Asymptote (Verhalten für } x \rightarrow -\infty) y = \frac{3}{2}$$

c) waagrechte Asymptote (Verhalten für  $x \rightarrow +\infty$ )  $y = 0$

$$\text{Beachte: } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{kx} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{kx} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{kx} = 0, \quad \dots \text{ (} k < 0 \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{kx} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{kx} = 0, \quad \dots \text{ (} k > 0 \text{)}$$

## 21. Lektion: Symmetrien

Siehe Beispiele im Kapitel "[Symmetrien](#)"

## 22. Lektion: Tangenten und Normalen

1. Bestimme die Gleichung der Tangente und Normalen an das

$$\text{Schaubild der Funktion } f \text{ mit } f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 2x^2 - x + 1 \text{ im Punkt } P(1|?)$$

und berechne deren Schnittpunkte mit den Achsen.

$$\text{Lösung: } f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x - 1; \quad f(1) = -\frac{15}{8} \quad f'(1) = -\frac{9}{2} \Rightarrow P\left(1 \mid -\frac{15}{8}; -\frac{9}{2}\right)$$

$$\text{Tangente: } y = -\frac{9}{2}x + \frac{21}{8} \quad \text{Achsenschnittpunkte } N\left(\frac{7}{12} \mid 0\right) \quad Q\left(0 \mid \frac{21}{8}\right)$$

$$\text{Normale: } y = \frac{2}{9}x + \frac{151}{72} \quad \text{Achsenschnittpunkte } N\left(\frac{151}{16} \mid 0\right) \quad Q\left(0 \mid \frac{151}{72}\right)$$

2.  $A(u|v)$  mit  $u > 0$  sei ein Punkt des Schaubildes  $K$  von  $f(x) = e^{-x}$ . Die

Parallele durch  $A$  zur  $x$ -Achse schneide die  $y$ -Achse in  $B$ . Die Tangente

in  $A$  an das Schaubild  $K$  schneide die  $y$ -Achse in  $C$ . Für welchen Wert

von  $u$  wird der Flächeninhalt des Dreiecks extremal?

$$\text{Lösung: Tangente in } A(u|e^{-u}); -e^{-u}: y = -e^{-u}x + ue^{-u} + e^{-u}$$

$$\Rightarrow C(0|ue^{-u} + e^{-u}). \text{ Flächeninhalt des Dreiecks } ABC: A(u) = \frac{1}{2}u(2-u)e^{-u}.$$

Um das Extremum zu bestimmen setzen wir  $A'(u) = 0$ :

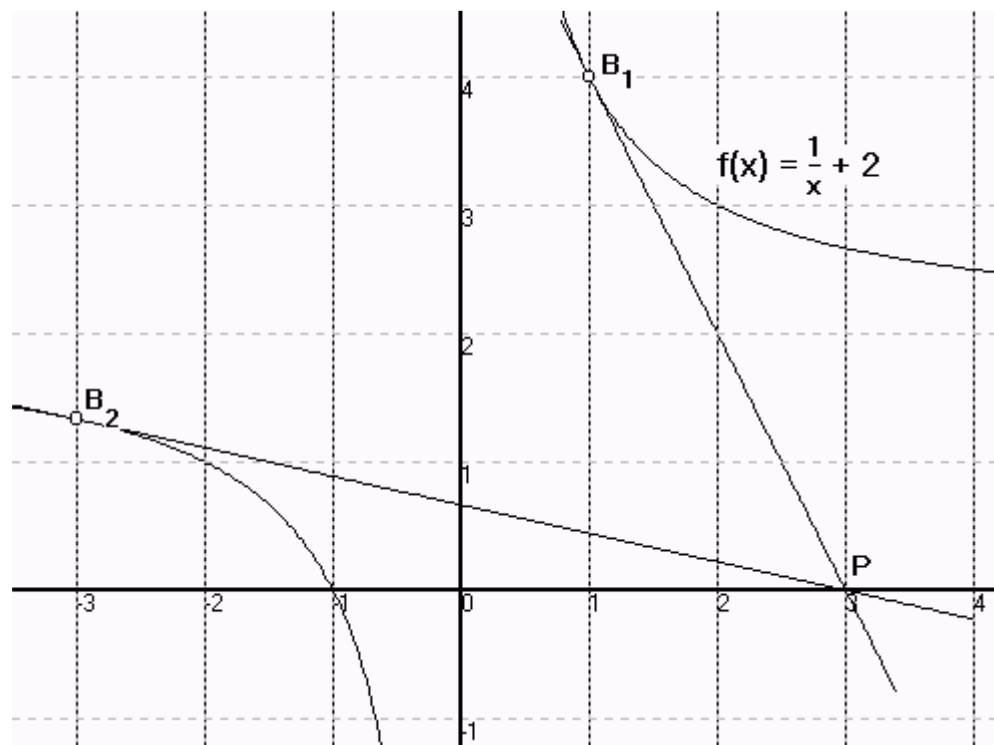
$$A'(u) = \frac{1}{2}u(2-u)e^{-u} = 0 \text{ bei } u = 0 \text{ mit Vorzeichenwechsel von } A' \text{ vom "+"}$$

nach "-".  $\Rightarrow$  Relatives Maximum  $A(2) = 2e^{-2}$ .

Da die Randwerte  $\lim_{u \rightarrow 0} A(u) = 0$  und  $\lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = 0$  handelt es sich

um ein absolutes Maximum.

3. Vom Punkt  $P(3|0)$  sollen die Tangenten an das Schaubild der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{2}{x} + 2$  gelegt werden.



Lösung: Sei  $B(u|f(u))$  ein Berührungspunkt.

Die Gleichung der Tangente in  $B$  ist dann  $y = f'(u)(x - u) + f(u)$

Hier:  $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

$$\text{Tangente in } B: y = -\frac{2}{u^2}(x - u) + \frac{2}{u} + 2 \quad (*)$$

Die Tangente soll durch  $P(3|0)$  gehen. Mache also in  $(*)$  die "Punktprobe"

mit  $x = 3$  und  $y = 0$ . Man erhält die Gleichung  $-\frac{2}{u^2}(3 - u) + \frac{2}{u} + 2 = 0$

Mit  $u^2$  durchmultipliziert ergibt sich  $-2(3 - u) + 2u + 2u^2 = 0$ .

Zu lösen ist also die quadratische Gleichung  $u^2 + 2u - 3 = 0$

mit den Lösungen  $u_1 = 1$  und  $u_2 = -3$  mit den Berührungspunkten  $B_1(1|3)$  und  $B_2(-3|\frac{4}{3})$ .

Man kann also von  $P(3|0)$  zwei Tangenten an das Schaubild von  $f$  legen.

Ihre Gleichungen sind dann  $y = -2x + 6$  mit Berührungspunkt  $B_1(1|3)$  und

$$y = -\frac{2}{9}x + \frac{4}{3} \text{ mit Berührungspunkt } B_2(-3|\frac{4}{3}).$$

